
PREMIERE S
Cours de Mathématiques

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 Généralités sur les fonctions	page 4
Chapitre 2 Polynôme du second degré	page 11
Chapitre 3 Dérivation	page 14
Chapitre 4 Suite numérique	page 18
Chapitre 5 Limites de suite numérique	page 23
Chapitre 6 Comportement asymptotique	page 26
Chapitre 7 Barycentre dans le plan	page 30
Chapitre 8 Produit scalaire	page 33
Chapitre 9 Transformation	page 37
Chapitre 10 Géométrie dans l'espace	page 40
Chapitre 11 Géométrie vectorielle	page 48
Chapitre 12 Géométrie analytique	page 51
Chapitre 13 Angle et trigonométrie	page 54
Chapitre 14 Statistique	page 58
Chapitre 15 Probabilité	page 64

Avant propos

Vous trouverez dans cet ouvrage édité par Math Performance, le cours complet de Première S conforme au programme officiel de l'éducation nationale.

Vous pouvez télécharger ou imprimer ce cours pour une utilisation privée ou collective uniquement.

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

1. Rappels

Définition

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} .
Définir une **fonction** f de D sur \mathbb{R} , c'est associer à chaque réel x de D un réel unique noté $f(x)$.
L'ensemble D s'appelle **domaine de définition**.
On appelle **image** de x par f le nombre $f(x)$.
Pour $y \in \mathbb{R}$ s'il existe $x \in D$ tel que $f(x) = y$, le nombre x est appelé **antécédent** de y par f .
(un nombre y peut avoir plusieurs antécédants).
La **représentation graphique** ou la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x est un élément de D .

2. Sens de variation d'une fonction

Définition

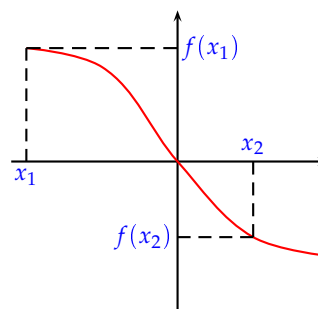
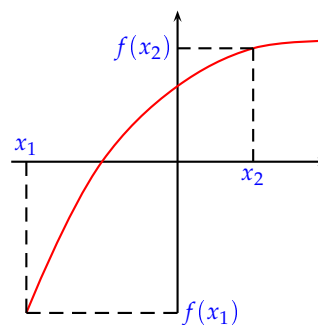
Soit f une fonction définie sur D et I un intervalle de D

- On dit que la fonction f est **croissante** sur I si :
Pour tout x_1, x_2 dans I , tels que $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$
- On dit que la fonction f est **décroissante** sur I si :
Pour tout x_1, x_2 dans I , tels que $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$
- On dit que la fonction f est **constante** sur I si :
Il existe un nombre réel k tel que pour tout réel x de I , $f(x) = k$

Remarques

*Une fonction croissante conserve l'ordre :
Pour tout les réels x_1 et x_2 de I ,
 $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans
le même ordre que x_1 et x_2 .*

*Une fonction décroissante «renverse» l'ordre :
Pour tout les réels x_1 et x_2 de I ,
 $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans
l'ordre contraire de x_1 et x_2 .*



3. Maximum, minimum, fonction majorée, minorée, bornée

Définition

Soit f une fonction définie sur D , I un intervalle de D et a un réel de I

• On dit que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si :

Pour tout x dans I , $f(x) \geq f(a)$ ($f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction).

• On dit que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si :

Pour tout x dans I , $f(x) \leq f(a)$ ($f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction).

• On dit que f est **majorée** par le réel M sur D si pour tout réel x de D , $f(x) \leq M$

• On dit que f est **minorée** par le réel m sur D si pour tout réel x de D , $f(x) \geq m$

• Une fonction f majorée et minorée est **bornée** sur D .

Exemple

| La fonction sinus est bornée car pour tout x dans \mathbb{R} : $-1 \leq \sin x \leq 1$.

4. Parité, périodicité

Définition

Soit f une fonction définie sur D ,

• On dit que f est **paire** si pour tout x appartenant à D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$

La courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

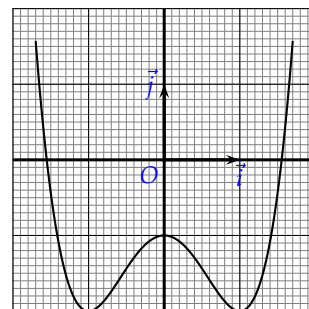
• On dit que f est **impaire** si pour tout x appartenant à D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$

La courbe représentative de f admet le centre du repère comme centre de symétrie.

Exemple

La fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ est paire car :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 1$
 $= x^4 - 2x^2 - 1$
 $= f(x)$



Définition

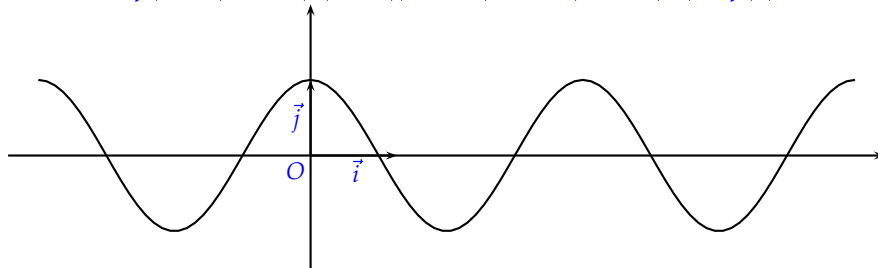
Soit f une fonction définie sur D .

On dit que f est **périodique** sur D si pour tout $x \in D$, $x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$

La courbe représentative d'une fonction périodique de période T est invariante par toute translation de vecteur $nT\vec{i}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(2x)$, est une fonction périodique de période π en effet :
 si $x \in \mathbb{R}$ alors $x + \pi \in \mathbb{R}$ et $f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$



5. Fonctions usuelles

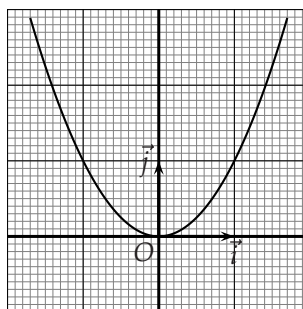
Définition et propriétés

Fonction carré

La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$

Propriétés

- f est paire.
- f est croissante sur $[0, +\infty[$.
- f est décroissante sur $]-\infty, 0]$.



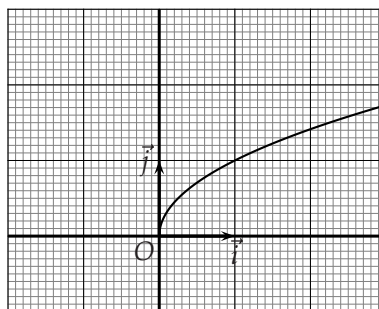
Définition et propriétés

Fonction racine carré

La fonction racine carré est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Propriété

- f est croissante sur $[0, +\infty[$.



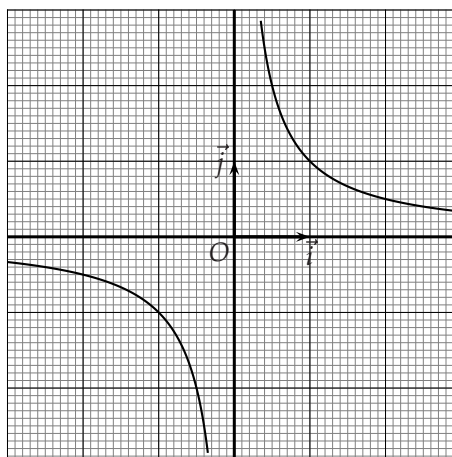
Définition et propriétés

Fonction inverse

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Propriétés

- f est impaire.
- f est décroissante sur $] -\infty, 0[$.
- f est décroissante sur $] 0, +\infty[$.



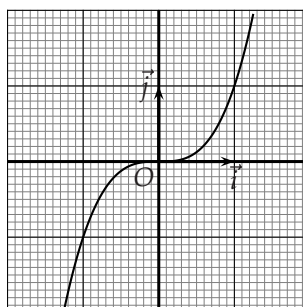
Définition et propriétés

Fonction cube

La fonction cube est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$

Propriétés

- f est impaire.
- f est croissante sur \mathbb{R} .



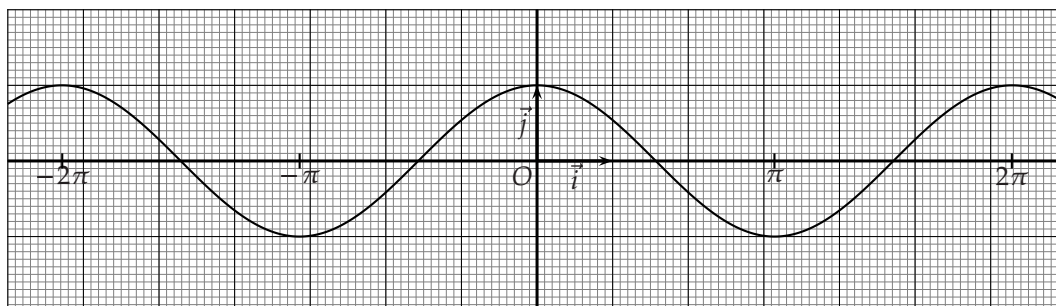
Définition et propriétés

Fonction cosinus

La fonction cosinus est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$

Propriétés

- f est paire.
- f est périodique de période 2π .
- f est décroissante sur $] 0, \pi[$.



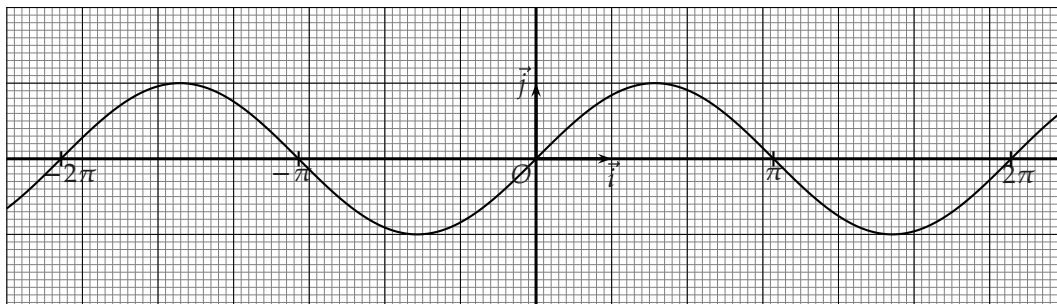
Définition et propriétés

Fonction sinus

La fonction sinus est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x)$.

Propriétés

- f est impaire.
- f est périodique de période 2π .
- f est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.



6. Opération sur les fonctions

Définition

Produit d'une fonction par un réel k

Soit u une fonction définie sur I .

La fonction ku est la fonction définie sur le même ensemble que la fonction u par :

$$(ku)(x) = k \times u(x)$$

La courbe \mathcal{C}_{ku} se déduit point par point à partir de la courbe \mathcal{C}_u en multipliant l'ordonnée $u(x)$ par k .

Propriétés

- Si $k > 0$ alors les fonctions u et ku ont le même sens de variation.
- Si $k < 0$ alors les fonctions u et ku ont des sens de variation opposés.

Définition

Somme de deux fonctions u et v

Soient u et v deux fonctions définies sur I .

La fonction $u + v$ est la fonction définie sur I par :

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x)$$

La courbe \mathcal{C}_{u+v} se déduit point par point à partir des courbes \mathcal{C}_u et \mathcal{C}_v en ajoutant les ordonnées.

Propriétés

- Si u et v sont deux fonctions croissantes alors $u + v$ est une fonction croissante.
- Si u et v sont deux fonctions décroissantes alors $u + v$ est une fonction décroissante.

Définition

Produit de deux fonctions u et v

Soient u et v deux fonctions définies sur I .

La fonction $u \times v$ est la fonction définie sur I par :

$$(u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$$

Définition

Quotient de deux fonctions u et v

Soient u et v deux fonctions définies sur I tel que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $\frac{u}{v}$ est la fonction définie sur I par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Définition

Composée de deux fonctions u et v

Soit u une fonction définie sur I et v une fonction définie sur $u(I)$.

La fonction $v \circ u$ est la fonction définie sur I par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

Propriétés

- Si u et v ont le même sens de variation alors $v \circ u$ est croissante.
- Si u et v ont des sens de variation opposés alors $v \circ u$ est décroissante.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Soit } u(x) &= x^2 + 1 \text{ et } v(x) = \sqrt{x} \\ \text{alors } v \circ u(x) &= v(u(x)) = v(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Remarque

En général, $f \circ g \neq g \circ f$

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I , on peut :

- Utiliser la définition et étudier l'ordre de $f(a)$ et $f(b)$ sachant $a \leq b$
- Considerer la fonction f comme la somme de fonctions monotones
- Considerer la fonction f comme le produit d'une fonction par un réel
- Considerer la fonction f comme la composée de plusieurs fonctions usuelles

Exemples

- Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x + 1 - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

On va décomposer la fonction f :

Posons $u : x \mapsto x + 1$, $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $w : x \mapsto -1 \times v$

Alors $f = u + w$

Etudions maintenant le sens de variation sur $]0; +\infty[$ de chacune de ces fonctions :

- La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur positif : elle est croissante sur $]0; +\infty[$.
- La fonction v est la fonction inverse : elle est décroissante sur $]0; +\infty[$
- La fonction w est le produit d'une fonction décroissante sur $]0; +\infty[$ par un réel négatif : elle est croissante sur $]0; +\infty[$.

Finalement, la fonction f est la somme de deux fonctions croissantes sur $]0; +\infty[$, elle est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

- Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sur $] -2; +\infty[$

On va décomposer la fonction f :

Posons $u : x \mapsto x + 2$, $v : x \mapsto \frac{1}{x}$

Alors $f = v \circ u$

Etudions maintenant le sens de variation sur $] -2; +\infty[$ de chacune de ces fonctions :

- La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur positif : elle est croissante sur $] -2; +\infty[$ et les images sont non nulles.
- La fonction v est la fonction inverse : elle est décroissante sur $]0; +\infty[$

Finalement, la fonction f est la composée de deux fonctions de sens de variation opposés sur $] -2; +\infty[$, elle est donc décroissante sur $] -2; +\infty[$.

7. Courbes et transformations

Méthode

Construire la courbe C_g d'équation $y = f(x) + \lambda$ à partir de la courbe C_f d'équation $y = f(x)$.

Considérons le point $M(x, f(x))$ de C_f et $M'(x, g(x))$ de C_g .

Les coordonnées de M' s'écrivent aussi $(x, f(x) + \lambda)$.

Alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(0, \lambda)$ ce qui montre que M se transforme en M' par la translation de vecteur $\lambda\vec{j}$.

On obtient C_g à partir de C_f par la translation de vecteur $\lambda\vec{j}$.

Il s'agit d'un déplacement vertical vers le haut lorsque $\lambda > 0$

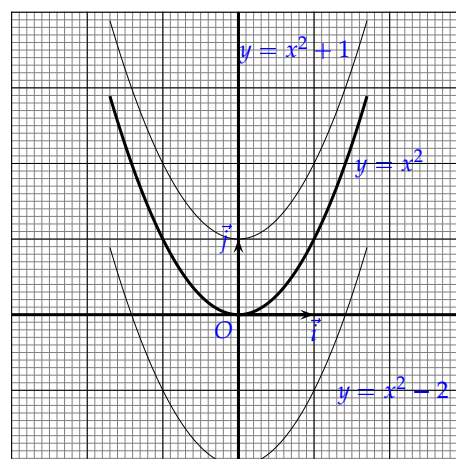
Il s'agit d'un déplacement vertical vers le bas lorsque $\lambda < 0$

Exemple

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$
de courbe représentative C_f

La courbe représentative de $g(x) = x^2 - 2$ s'obtient
à partir de C_f par une translation de vecteur $-2\vec{j}$

La courbe représentative de $h(x) = x^2 + 1$ s'obtient
à partir de C_f par une translation de vecteur \vec{j}



Méthode

Construire la courbe C_g d'équation $y = f(x + \lambda)$ à partir de la courbe C_f d'équation $y = f(x)$

Considérons le point $M(x, f(x))$ de C_f et $M'(x - \lambda, g(x - \lambda))$ de C_g .

Si $g(x) = f(x + \lambda)$ pour tout x alors $g(x - \lambda) = f(x - \lambda + \lambda) = f(x)$

Donc M' a pour coordonnées $(x - \lambda, f(x))$

Ce qui montre que $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(-\lambda, 0)$.

On obtient C_g à partir de C_f par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$.

Il s'agit d'un déplacement horizontal vers la gauche lorsque $\lambda > 0$

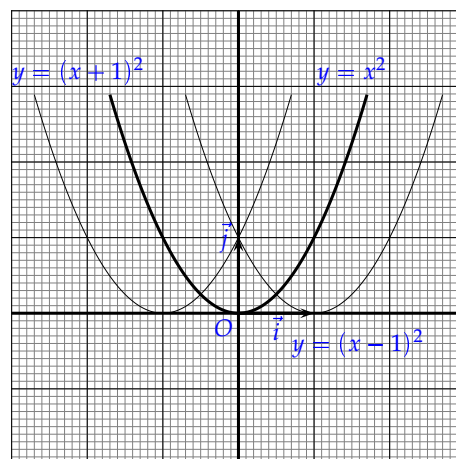
Il s'agit d'un déplacement horizontal vers la droite lorsque $\lambda < 0$

Exemple

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$
de courbe représentative C_f

La courbe représentative de $g(x) = (x - 1)^2$ s'obtient
à partir de C_f par une translation de vecteur \vec{i}

La courbe représentative de $h(x) = (x + 1)^2$ s'obtient
à partir de C_f par une translation de vecteur $-\vec{i}$



Chapitre 2

Polynôme du second degré

1. Généralités

Théorème et définition

Un polynôme non nul de degré n est une fonction définie sur \mathbb{R} dont une écriture est :
 $P : x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où a_0, a_1, \dots, a_n sont des réels et $a_n \neq 0$.

- Deux polynômes, différents du polynôme nul, sont égaux si :
 - ils ont le même degré.
 - les coefficients des termes de même degré sont identiques.
- α est racine de la fonction polynôme P si $P(\alpha) = 0$.
- Si α est racine du polynôme P , alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$.

Exemple

$P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \sqrt{2}x$ est une fonction polynôme de degré 3.

2. Polynôme du second degré

Définition

On appelle fonction polynôme du second degré la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Propriété

Forme canonique

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec $a \neq 0$ alors :

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

Cette forme s'appelle **forme canonique** de P .
 Δ s'appelle **discriminant** de P .

Démonstration

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Exemple

Déterminer la forme canonique de $x^2 + 3x + 3$

Dans l'expression $x^2 + 3x + 3$ notre attention va se porter sur $x^2 + 3x$. Il s'agit d'écrire $x^2 + 3x$ sous la forme $a^2 + 2ab$. Cette expression est intéressante car, en ajoutant b^2 on met en évidence une identité remarquable (si on ajoute b^2 , il convient aussi de retrancher b^2 sinon on change la valeur de l'expression).

Ainsi nous avons $a^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 = (a + b)^2 - b^2$

Dans notre exemple $x^2 + 3x$ est de la forme $a^2 + 2ab$ avec $a = x$ et $2b = 3$, on en déduit $b = \frac{3}{2}$

alors $x^2 + 3x + 3 = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ est la forme canonique de $x^2 + 3x + 3$.

3. Equation du second degré

Théorème

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) et Δ le discriminant de $ax^2 + bx + c$

Selon le signe de Δ nous distinguerons 3 cas :

- $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles
- $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique : $-\frac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple 1

Résoudre l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

$\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2} = -3$$

Exemple 2

Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 2 \times 1 = -1$$

$\Delta < 0$ alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

4. Etude du signe d'un polynôme du second degré

Théorème

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré de discriminant Δ .

- Si $\Delta \leq 0$, $P(x)$ est du signe de a .
- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines x_1 et x_2 on suppose $x_1 < x_2$

$P(x)$ est du signe de a si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

$P(x)$ est du signe de $-a$ si $x \in]x_1; x_2[$

En d'autres termes P est du signe de ' a ' à l'extérieur des racines et du signe de ' $-a$ ' à l'intérieur des racines.

Exemple 1

Déterminer le signe de $P(x) = x^2 + 5x + 6$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

$\Delta > 0$ alors P admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2} = -3$$

$P(x)$ est du signe de ' a ' à l'extérieur des racines ainsi

$$P(x) > 0 \text{ si } x \in]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[$$

$P(x)$ est du signe de ' $-a$ ' à l'intérieur des racines ainsi

$$P(x) < 0 \text{ si } x \in]-3; -2[$$

Exemple 2

Déterminer le signe de $P(x) = -x^2 + 5x + 6$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 49$$

$\Delta > 0$ alors P admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{-2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{-2} = 6$$

$P(x)$ est du signe de ' a ' à l'extérieur des racines ainsi

$$P(x) < 0 \text{ si } x \in]-\infty; -1[\cup]6; +\infty[$$

$P(x)$ est du signe de ' $-a$ ' à l'intérieur des racines ainsi

$$P(x) > 0 \text{ si } x \in]-1; 6[$$

Exemple 3

Déterminer le signe de $P(x) = x^2 + x + 1$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

$\Delta < 0$ alors $P(x)$ est toujours du signe de ' a ' ,

donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exemple 4

Déterminer le signe de $P(x) = -x^2 + 4x - 4$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$$

$\Delta = 0$ alors P est du signe de ' a '

donc $P(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

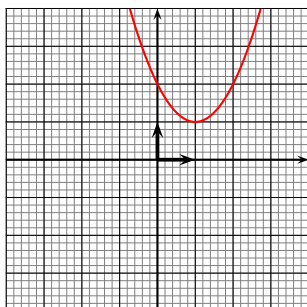
5. Interprétation graphique

Représentation graphique

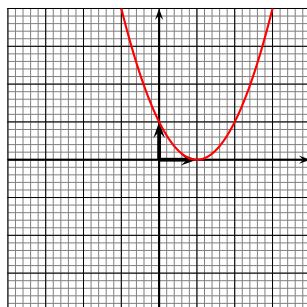
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré (avec $a \neq 0$) alors, selon le signe de a et le signe de Δ , la courbe représentative de P est de la forme :

$$a > 0$$

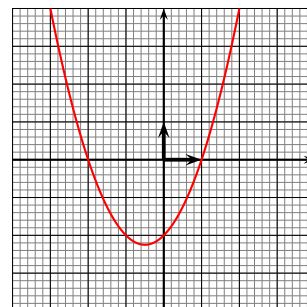
$$\Delta < 0$$



$$\Delta = 0$$

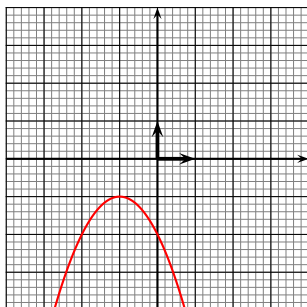


$$\Delta > 0$$

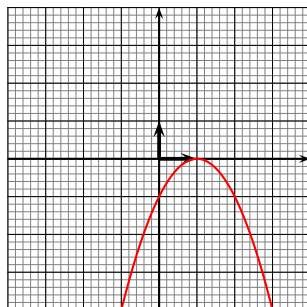


$$a < 0$$

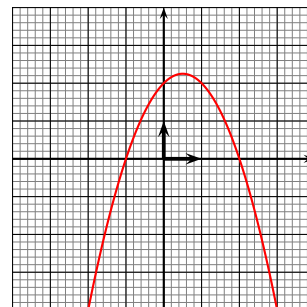
$$\Delta < 0$$



$$\Delta = 0$$



$$\Delta > 0$$



6. Autres théorèmes

Théorèmes

Les trois théorèmes suivants ne sont pas au programme, mais peuvent s'avérer utile pour vérifier la validité d'un exercice.

• $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines x_1 et x_2
alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

• Lorsque le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont donnés par $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$

• Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$

7. Méthodes et astuces

• Pour résoudre $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ il n'est pas forcément nécessaire de calculer le discriminant. En effet si P admet des racines évidentes alors la solution est immédiate. Les racines évidentes sont à chercher parmi les entiers naturels en particulier 1 ou -1 .

• Des factorisations peuvent apparaître dans l'expression de P (penser à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$). Une fois l'expression factorisée, les racines en découlent.

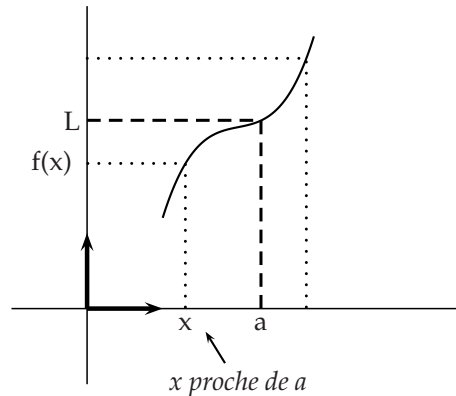
Chapitre 3

Dérivation

1. Limite d'une fonction numérique en un point a

Définition

On dit que f tend vers L quand x tend vers a si la distance de $f(x)$ à L peut être rendu aussi petite que l'on veut dès lors que x est suffisamment proche de a



Exemple

$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$ en effet $\sqrt{h} \leq 10^{-p}$ dès que $0 \leq h \leq 10^{-2p}$

Ainsi $|\sqrt{h}|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut c'est à dire $\sqrt{h} \leq 10^{-p}$ dès que h est suffisamment petit c'est à dire $0 \leq h \leq 10^{-2p}$

Théorème admis

Soit f une fonction définie sur I sauf en a et g une fonction définie sur I .

Si g admet une limite en a et si pour tout $x \neq a$ on a $f(x) = g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$

2. Nombre dérivé de f en a

Définition

Soit f une fonction définie en a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre appartenant à \mathbb{R} A tel que

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce nombre A , lorsqu'il existe, est appelé nombre dérivé de f en a et on note $A = f'(a)$

Remarque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Il suffit de poser $x = a + h$

Exemple 1

La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en 3 et son nombre dérivée est 6, en effet

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

or $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$ ainsi $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 6$

La fonction x^2 est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$

Exemple 2

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas dérivable en 0, en effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

Ainsi la fonction \sqrt{x} n'est pas dérivable en 0

3. Fonction dérivée

Définition

Soit \mathcal{I} un intervalle. Soit f une fonction dérivable en tout nombre $x \in \mathcal{I}$

La fonction qui à chaque réel $x \in \mathcal{I}$ associe le nombre dérivé de f en x est appelé fonction dérivée de f et notée f' .

On a ainsi $f' : x \mapsto f'(x)$

4. Dérivées de référence et opération algébrique

Fonction: $f(x) =$	Dérivée: $f'(x) =$
k ($k \in \mathbb{R}$)	0
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ ($x \neq 0$ $n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x} ($x > 0$)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle \mathcal{I} et k un nombre réel alors :

- $u + v$ est dérivable sur \mathcal{I} et $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$
- $u \times v$ est dérivable sur \mathcal{I} et $(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- $k \times u$ est dérivable sur \mathcal{I} et $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$
- Si v ne s'annule pas sur \mathcal{I} alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur \mathcal{I} et $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
- Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine tel que $f(\mathcal{I})$ appartienne à l'ensemble de définition de u alors $(u(ax + b))' = a \cdot u'(ax + b)$

Exemple

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$ alors $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x^2 - 2x\sqrt{x}}{x^4}$

Soit $f(x) = \sin(-3x + 5)$ alors $f'(x) = -3 \cos(-3x + 5)$

5. Approximation affine et tangente à la courbe en un point

Propriété

La définition de la dérivée peut se traduire de la façon suivante :

Si f est dérivable en a alors $f(x) = (x - a)f'(a) + f(a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Cela signifie que lorsque x est proche de a alors une approximation de $f(x)$ est $(x - a)f'(a) + f(a)$

On parlera alors d'approximation affine de f .

$(x - a)\varepsilon(x)$ représente l'erreur commise lorsque l'on remplace $f(x)$ par $(x - a)f'(a) + f(a)$

Exemple

Soit f une fonction définie sur $[1;3]$ et dérivable en 2, avec $f(2) = -5$ et $f'(2) = 100$

Donner une estimation de $f(1,9)$ et de $f(2,1)$

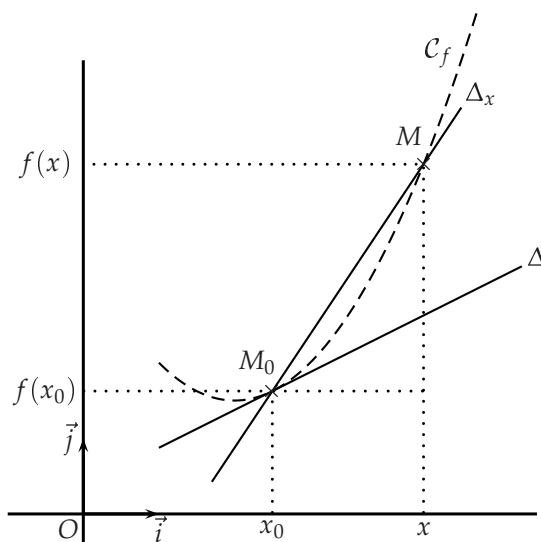
Une approximation affine de f au voisinage de 2 est:

$$(x - 2)f'(2) + f(2) = (x - 2)100 - 5 = 100x - 205$$

Une estimation de $f(1,9)$ est $100 \times 1,9 - 205 = -15$

Une estimation de $f(2,1)$ est $100 \times 2,1 - 205 = 5$

Tangente à la courbe



Soit f une fonction de courbe représentative C_f .

Soit M_0 un point de C_f de coordonnée $(x_0; f(x_0))$.

Soit M un point de C_f de coordonnée $(x; f(x))$ et Δ_x la droite passant par M_0 et M .

Quand x s'approche de x_0 alors la droite Δ_x pivote autour du point M_0 et le point M glisse sur la courbe C_f vers le point M_0 .

Quand x est très proche de x_0 c'est à dire quand x tend vers x_0 , la droite Δ_x bascule alors vers une droite limite Δ , qu'on appelle tangente à la courbe C_f au point M_0 .

Le coefficient directeur de la droite Δ_x est $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ alors le coefficient directeur de la droite

$$\Delta \text{ est } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Nous retiendrons le résultat suivant:

Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$.

Propriété

Une équation de la droite tangente à la courbe au point M_0 d'abscisse x_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration

Une équation de la tangente est $y = f'(x_0)x + b$ or la tangente passe par le point M_0 et donc les coordonnées de M_0 vérifient l'équation de la tangente c'est à dire: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$.
 En faisant la différence de ces deux équations on obtient :
 $y - f(x_0) = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

6. Variation et extremum

Théorème admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle \mathcal{I} alors

- Si $f'(x) = 0$ pour tout x appartenant à \mathcal{I} alors f est constante sur \mathcal{I} .
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à \mathcal{I} alors f est croissante sur \mathcal{I} .
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x appartenant à \mathcal{I} alors f est strictement croissante sur \mathcal{I} .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à \mathcal{I} alors f est décroissante sur \mathcal{I} .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout x appartenant à \mathcal{I} alors f est strictement décroissante sur \mathcal{I} .

Remarque

Dans la pratique, on étudie le signe de la dérivée en découpant l'ensemble d'étude en plusieurs intervalles.

Exemple

$$\text{Soit } f(x) = \frac{-x-1}{x^2+x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2+x+1) - (-x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

Pour tout x on a $(x^2+x+1)^2 > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $x(x+2)$

- Si $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$ alors $f'(x) \geq 0$
- Si $x \in [-2, 0]$ alors $f'(x) \leq 0$

Les résultats peuvent être traduits dans le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$				

Propriétés

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert \mathcal{I} .

Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert \mathcal{I} et x_0 un réel de \mathcal{I} .

Si la fonction dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0 .

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ la fonction carré, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$ et $f'(0) = 0$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^-$ $2x \leq 0$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $2x \geq 0$

f change de signe en 0 et sa dérivée s'annule en 0 donc f admet un extremum local en 0

Chapitre 4

Suite numérique

1. Introduction

Notion intuitive de suite

La notion de suite est une notion que l'on peut rencontrer dans la vie quotidienne, par exemple le tirage des six numéros du loto est une suite de nombres obtenus d'une manière aléatoire. Néanmoins il y a des suites de nombres qui obéissent à des lois particulières. Vous avez peut être déjà répondu à des tests psychotechniques: on vous propose une série de nombres et on vous demande de trouver le nombre suivant. Par exemple, soient les nombres 3, 6, 9, 12. Quel est le nombre suivant? Il s'agit évidemment du nombre 15. Pour passer d'un nombre au suivant il suffit d'ajouter 3 à chaque fois.

Comment traduire mathématiquement cette situation?

On remarque que les nombres 3, 6, 9, 12 sont rangés dans un certain ordre, chaque nombre occupe une position particulière.

Il serait peut être judicieux de proposer une association entre la position occupée par le nombre (qui appartient à l'ensemble des entiers naturels) et la valeur de ce nombre qui appartient à l'ensemble des nombres réels c'est à dire :

- à la position $n = 1$ on associe le nombre réel 3
- à la position $n = 2$ on associe le nombre réel 6
- à la position $n = 3$ on associe le nombre réel 9
- à la position $n = 4$ on associe le nombre réel 12

On définit alors une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} où l'image de n peut se noter $u(n)$.

Ce résultat peut être traduit dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4
$u(n)$	3	6	9	12

Dans le paragraphe suivant nous allons définir d'une manière rigoureuse la notion de suite.

2. Suite numérique

Définition

Soit $a \in \mathbb{N}$, soit $I_a = \{n \in \mathbb{N}, n \geq a\}$ c'est à dire l'ensemble de tous les entiers naturels à partir de a

Une suite numérique est une fonction u de I_a dans \mathbb{R} soit

$$\begin{array}{l} u : I_a \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{array}$$

Notation

Compte tenu de cette définition, il faudrait utiliser une notation du type $u(0), u(1), u(2) \dots$ pour désigner les différentes valeurs de u , mais on préfère la notation en indice $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ u_n s'appelle terme de la suite.

Remarques

La notation fonctionnelle u peut être remplacé par l'écriture (u_n) ou $(u_{n \geq a})$.

Une suite étant une application, il est légitime de définir une suite comme on définit une application à savoir : $u_n = f(n)$ où $f(n)$, est une fonction de n , mais nous verrons dans le paragraphe suivant que ce n'est pas systématique.

En effet il existe une autre manière de définir une suite.

3. Modes de définition d'une suite

Mode explicite

Le terme général de la suite est exprimé en fonction de n , $u_n = f(n)$

Exemples et représentations graphiques

• Exemples:

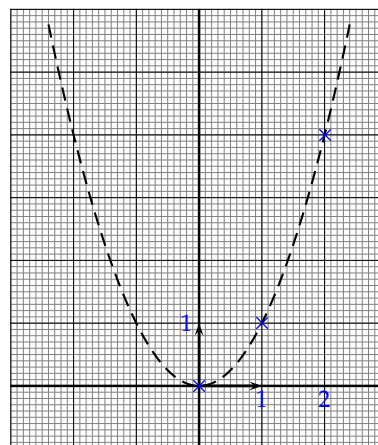
$$u_n = \frac{n+1}{n}; \quad u_n = n^2; \quad u_n = \frac{1}{n}; \quad u_n = (-1)^n; \quad u_n = \frac{1}{n-3}$$

• Représentation graphique de $u_n = n^2$

Puisqu'une suite est une fonction, on peut obtenir sa représentation graphique. Cherchons la représentation graphique de $u_n = n^2$ à savoir, la représentation graphique

$$\text{de } u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto n^2$$

La représentation graphique de u se déduit de celle de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en ne représentant que les points dont les abscisses sont entières.



Mode récurrent d'une suite

Une suite récurrente est définie par la donnée de son premier terme et d'un procédé qui permet de déterminer un terme en fonction des autres. $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{cases}$

Exemples et représentations graphiques

• Exemples:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 1 \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2 \times u_n \\ u_0 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

• Représentation graphique de $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ alors $u_{n+1} = f(u_n)$

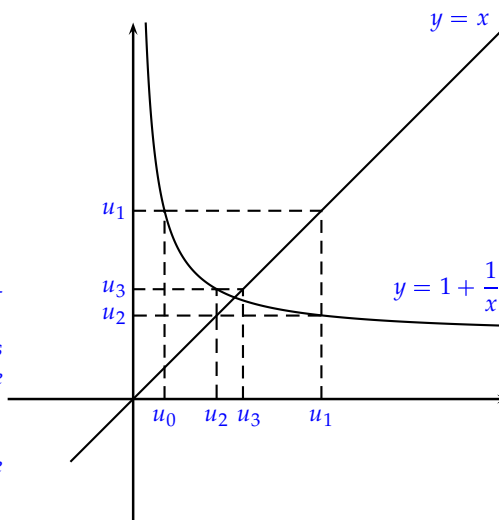
On représente $u_0 = \frac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses.

On représente $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées, en utilisant la courbe C_f .

Pour représenter u_2 il convient de ramener u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la fonction $y = x$, il suffit ensuite de déterminer l'image de u_1 par f en utilisant la courbe C_f .

$f(u_1) = u_2$ se retrouve alors sur l'axe des ordonnées.

On ramène u_2 sur l'axe des abscisses et ensuite on cherche l'image de u_2 par f on obtient u_3 , etc



Remarque

Pour connaître le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite il faut connaître le $(n - 1)^{\text{ième}}$ ainsi, il n'est pas aisé de trouver le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite récurrente.
L'objet de certains problèmes est de trouver la forme explicite d'une suite récurrente.

4. Suite arithmétique

Introduction

Soient 2, 4, 6, 8 les quatre premiers termes d'une suite.

$u(n)$	2	4	6	8
n	1	2	3	4

On constate que la différence de deux termes consécutifs est constante et égale à $r = 2$: ce type de suite est appelé **suite arithmétique** de raison $r = 2$

Définition

On appelle suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r la suite $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \end{cases}$

Remarque

Cette définition est la définition récurrente d'une suite arithmétique, on l'utilisera souvent pour traduire une situation concrète, néanmoins cette définition n'est pas adaptée pour calculer un terme quelconque de la suite.

Propriété 1

Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors $u_n = u_0 + nr$

Propriété 2

Si u est une suite arithmétique alors pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p + (n - p)r$

Exemple

Il est assez courant d'étudier une suite arithmétique dont le premier terme est u_1 alors il conviendra d'utiliser la propriété 2 pour obtenir sa forme explicite: $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Propriété 3

Soit u une suite arithmétique, alors

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique alors $u_{25} + u_{26} + \dots + u_{68} = \frac{44 \times (u_{25} + u_{68})}{2}$.
En effet le nombre de terme est égal à $(68 - 25) + 1 = 44$.

5. Suite géométrique

Introduction

Soient 2, 4, 8, 16 les quatre premiers termes d'une suite.

$u(n)$	2	4	8	16
n	1	2	3	4

On constate que le quotient de deux termes consécutifs est constant et égal à $q = 2$: ce type de suite est appelé **suite géométrique** de raison $q = 2$.

Définition

On appelle suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = qu_n \\ u_0 \end{cases}$$

Remarque

Cette définition est la définition récurrente d'une suite géométrique, on l'utilisera souvent pour traduire une situation concrète, néanmoins cette définition n'est pas adaptée pour calculer un terme quelconque de la suite.

Propriété 1

Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors

$$u_n = u_0 q^n$$

Propriété 2

Si u est une suite géométrique alors pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p q^{(n-p)}$

Exemple

Il est assez courant d'étudier une suite géométrique dont le premier terme est u_1 alors il conviendra d'utiliser la propriété 2 pour obtenir sa forme explicite: $u_n = u_1 q^{n-1}$

Propriété 3

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1er terme

nombre de termes

Exemple

Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 alors $u_{30} + u_{31} + \dots + u_{68} = u_{30} \frac{1 - (-2)^{39}}{1 - (-2)}$.

En effet le nombre de terme est égal à $(68 - 30) + 1 = 39$.

Exemple

Considérons la suite $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Montrons que la suite $v_n = u_n - 3$ est une suite géométrique.

Il faut montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}^*$ / $v_{n+1} = qv_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2u_n - 6 \\ &= 2(v_n + 3) - 6 \quad \text{car } v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = v_n + 3 \\ &= 2v_n + 6 - 6 \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$.

On peut alors écrire $v_n = -2 \times 2^n$

6. Terminologie relative aux propriétés d'une suite

Définitions

La suite (u_n) est dite **croissante** (respectivement **strictement croissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$)

La suite (u_n) est dite **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$)

La suite (u_n) est dite **stationnaire** si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n$

La suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M$

La suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq m$

Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Exemple

Soit $u_n = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est à terme strictement positif

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \text{ et donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

On en déduit que $u_{n+1} > u_n$ et donc (u_n) est strictement croissante.

Remarque

Certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes, par exemple, $u_n = (-1)^n$.

Chapitre 5

Limites de suite numériques

1. Suite convergente et divergente

Définition

• Une suite (u_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert \mathcal{U} contenant L , tous les termes de la suite appartiennent à \mathcal{U} sauf un nombre fini.

On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$

• Une suite (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente.

Remarques

Si une suite est divergente, alors soit elle admet une limite infinie, soit elle n'a pas de limite.

On dira qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert $]a, +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p .

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 1

La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ converge vers 0. En effet tout intervalle qui contient zéro, contient aussi l'intervalle $] -a, a[$ avec $a > 0$ et $u_n \in] -a, a[\iff \frac{1}{n^2} < a \iff n > \sqrt{\frac{1}{a}}$ donc tous les termes de la suite u_n sont contenus dans l'intervalle $] -a, a[$ dès que n est supérieur à $\sqrt{\frac{1}{a}}$. Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

Exemple 2

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est une suite divergente.

Propriétés

• La limite d'une suite est unique.

• Une suite (u_n) converge vers L est équivalent à dire que la suite $(u_n - L)$ converge vers 0.

2. Théorèmes de comparaison

Critère de convergence

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites numériques telles que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang
- Les suites (u_n) et (w_n) convergent vers L

alors la suite (v_n) converge vers L

Conséquences

Si à partir d'un certain rang, on a $|u_n - L| \leq v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors la suite (u_n) converge vers L

Remarque

Ce théorème s'appelle aussi théorème des gendarmes.

Exemple

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soit } u_n = \frac{\sin n}{n}, \text{ on a } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \end{array} \right.$$

Critère de divergence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soit } u_n = (3 + (-1)^n)n^2, \text{ on a } 3 + (-1)^n \geq 2 \text{ alors } (3 + (-1)^n)n^2 \geq 2n^2 \\ \text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{array} \right.$$

3. Opérations algébriques

Propriétés

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives L et L' , alors:

- La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $L + L'$
- La suite $(u_n v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $L.L'$
- Si en plus $L' \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente et sa limite est égale à $\frac{L}{L'}$

Exemple

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soient } u_n = \frac{1}{n^2} \text{ et } v_n = \frac{2}{n} + 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3 \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 3 \end{array} \right.$$

4. Limite de suite et limite de fonction

Propriétés

Soit f une fonction définie sur $]a, +\infty[$ et $u_n = f(n)$ une suite définie à partir de $n > a$.
Si f admet en $+\infty$, une limite finie, ou infinie alors la suite (u_n) admet la même limite.

Exemple

$$\left| \begin{array}{l} \text{Déterminons la limite de la suite } u_n = 1 + \frac{1}{n} \\ \text{Soit } f(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ alors } u_n = f(n) \\ \text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \end{array} \right.$$

5. Suite géométrique

Théorème

Soit q un réel, non nul et différent de 1.

- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge vers 1
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Chapitre 6

Comportements asymptotique

1. Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$

Définitions

- On dit que la fonction f a pour limite l appartenant à \mathbb{R} en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
- On dit que la fonction f a pour limite l appartenant à \mathbb{R} en $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment petit.

2. Limite infinie en a

Définitions

- Soit f une fonction définie sur \mathcal{I} , contenant l'intervalle $]a; a + \varepsilon[$ ou $]a - \varepsilon; a[$ avec $\varepsilon > 0$
- On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a
 - On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a

3. Fonction de référence

On admettra que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

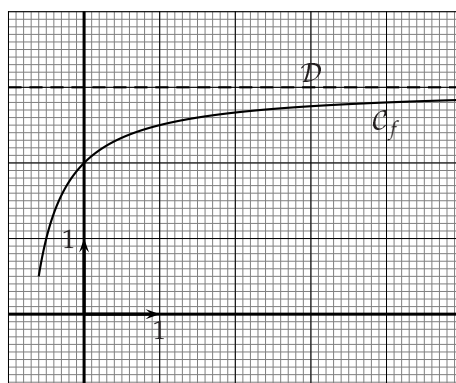
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

4. Asymptote

Définition 1 : asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$) alors, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ (ou en $-\infty$)

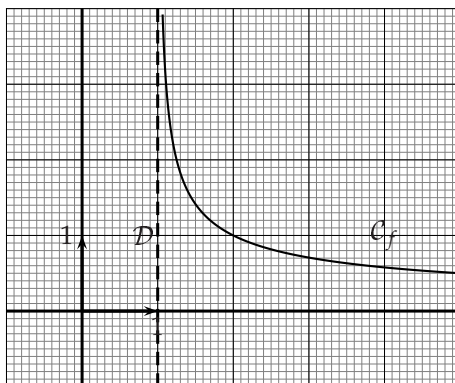


Exemple

La fonction d'équation $y = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Définition 2 : asymptote verticale

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) alors, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f

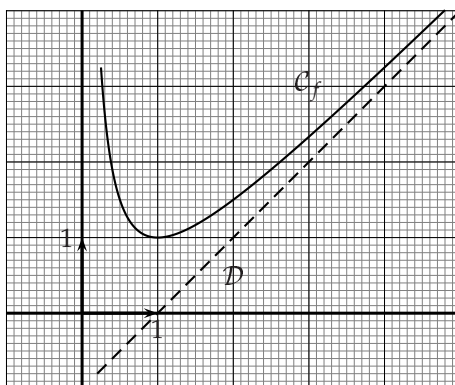


Exemple

La fonction d'équation $y = \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a pour asymptote verticale d'équation $x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Définition 3 : asymptote oblique

On dit que la droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ (ou en $-\infty$) à la courbe \mathcal{C}_f d'équation $y = f(x)$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$)



Exemple

La fonction d'équation $y = f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$. En effet $f(x) - (x + 1) = x + 1 + \frac{1}{x} - (x + 1) = \frac{1}{x}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$ ainsi $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe.

5. Opération sur les limites

Dans ce paragraphe a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$
 L et L' désignent deux nombre réels.

Limite de $f + g$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	L ou $+\infty$	L ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminé

Limite de $f \times g$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	indéterminé

Limite de $\frac{1}{f}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	$L = 0$ et $f(x) > 0$	$L = 0$ et $f(x) < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} =$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limite de $\frac{f}{g}$

La limite de $\frac{f}{g}$ revient à déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ et ensuite de déterminer la limite du produit de f par $\frac{1}{g}$.

Propriété

La limite d'un **polynôme** en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
 La limite d'une **fonction rationnelle** dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions polynômes en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^4 - x^3 + x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^4 = +\infty$$

Exemple 2

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{3x^3 + x^2}$

Au voisinage de $+\infty$ la limite de $\frac{x^3 + 2x + 1}{3x^3 + x^2}$ est la même que la limite de la fonction $\frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$

On obtient donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{3x^3 + x^2} = \frac{1}{3}$

Exemple 3

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^4 - x^3 + 2x + 1)(x^7 + 3x - 1)$$
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^4 - x^3 + 2x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 + 3x - 1 = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^4 - x^3 + 2x + 1)(x^7 + 3x - 1) = +\infty$$

Exemple 4

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{-x^2 + 5x - 6}$$

Etudions le signe de $-x^2 + 5x - 6$

Nous obtenons immédiatement le tableau suivant:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$-x^2 + 5x - 6$	-	+	-	

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} -x^2 + 5x - 6 = 0 \\ -x^2 + 5x - 6 > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 5 = -3 \end{array} \right\} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x - 5}{-x^2 + 5x - 6} = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} -x^2 + 5x - 6 = 0 \\ -x^2 + 5x - 6 < 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{-x^2 + 5x - 6} = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 5 = -3 \end{array} \right\} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x - 5}{-x^2 + 5x - 6} = +\infty$$

Chapitre 7

Barycentre dans le plan

Définition

Soit A un point du plan \mathcal{P} et a un nombre réel, on appelle point pondéré de \mathcal{P} , tout couple (A, a) .
Le nombre a est appelé coefficient ou poids du point A .

Définition et propriété

Soit $\{(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)\}$ un système de n points pondérés tels que $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$

alors il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés $(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)$

Si $a_1 = a_2 = \dots \dots \dots = a_n = 1$ alors G est appelé isobarycentre du système de points pondérés $\{A_1, A_2, \dots \dots \dots, A_n\}$

Démonstration

Soit M un point du plan ou de l'espace alors cherchons l'ensemble des points M tels que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$, alors si on introduit le point O il s'ensuit:

$$\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \text{ est équivalent à } \sum_{i=1}^n a_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0} \text{ soit } \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{MO} = \frac{-\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{A_iO}}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Le vecteur $\frac{\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{A_iO}}{\sum_{i=1}^n a_i}$ est constant et égale par exemple à \vec{u} or étant donné un point O et un vecteur \vec{u} il existe un

unique point M tel que $\overrightarrow{MO} = \vec{u}$ d'où l'existence et l'unicité du point M qu'on identifiera à G .

Exemples

Le barycentre du système de point pondéré $\{(A; 1); (B; 1)\}$ est le milieu du segment $[AB]$

Le barycentre du système de point pondéré $\{(A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$ est le centre de gravité du triangle ABC c'est à dire l'intersection des médianes du triangle.

Propriétés

Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)\}$

alors pour tout point M

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Démonstration

G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)\}$

$$\text{alors } \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \text{ et donc } \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GM} + \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} \text{ et donc } \overrightarrow{MG} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i}}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

Propriété

Le barycentre de n points pondérés reste inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un même nombre.

Démonstration

Soit G le barycentre des n points pondérés $(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)$ alors $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ nous avons $\sum_{i=1}^n \alpha a_i \overrightarrow{GA_i} = \alpha \vec{0} = \vec{0}$

Ainsi G est le barycentre du système de points pondérés $(A_1; \alpha a_1); (A_2; \alpha a_2); \dots \dots \dots (A_n; \alpha a_n)$

Théorème d'associativité

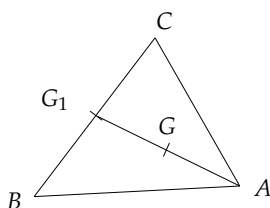
On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés $\{(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)\}$ en remplaçant deux ou plusieurs points pondérés par leur barycentre (s'il existe) affecté de leur masse.

Exemple

Soit un triangle ABC , en utilisant le théorème d'associativité construire le barycentre du système de points pondérés suivant $\{(A; 4); (B; 2); (C; 2)\}$

Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(B; 2); (C; 2)\}$ c'est également le barycentre du système de points pondérés $\{(B; 1); (C; 1)\}$. c'est donc le milieu du segment $[BC]$. En utilisant le théorème d'associativité on obtient, G barycentre du système $\{(A; 4); (G_1; 4)\}$. C'est également le barycentre du système $\{(A; 1); (G_1; 1)\}$ soit le milieu du segment $[AG_1]$

Pour construire G , on cherche le milieu G_1 de $[BC]$ puis on trace le segment $[G_1C]$, le milieu de ce segment est G



Théorème

Soit f une symétrie, une translation ou une rotation. Soit G le barycentre du système de points pondérés $(A_1; a_1); (A_2; a_2); \dots \dots \dots (A_n; a_n)$ alors $f(G)$ est le barycentre du système de points pondérés $(f(A_1); a_1); (f(A_2); a_2); \dots \dots \dots (f(A_n); a_n)$

Démonstration

Pour la translation, voir dans le chapitre transformation.

Méthode

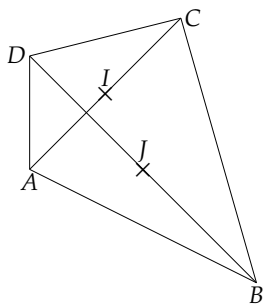
- Pour montrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que l'un d'entre eux est barycentre des deux autres.
- Pour montrer que des droites sont concourantes, il suffit de montrer que ces droites passent par différents barycentres partiels provenant d'un ensemble de points pondérés. Le point de concours est le barycentre des points pondérés.

Exemple 1

Considérons un quadrilatère quelconque $ABCD$, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[DB]$

et un point G tel que $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{DC})$ (1).

Il s'agit de montrer que les points I , J et G sont alignés.



D'après la relation (1), $2\vec{AG} = \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{BG} + \vec{GC} + \vec{DG} + \vec{GC}$

soit $2\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} - \vec{GD} = \vec{0}$ ainsi

G est le barycentre de $\{(A,2); (B,-1); (C,2); (D,-1)\}$

G est le barycentre de $\{(A,2); (C,2); (B,-1); (D,-1)\}$

G est le barycentre de $\{(I,4); (J,-2)\}$

On en déduit que les points I , J et G sont alignés.

Exemple 2

Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Par hypothèse A' est le milieu de $[BC]$, B' est le milieu de $[AC]$, et C' est le milieu de $[AB]$

ce qui peut se traduire en terme de barycentre de la façon suivante:

• $\vec{A'B} + \vec{A'C} = \vec{0}$ soit A' barycentre de $\{(B,1); (C,1)\}$

• $\vec{B'C} + \vec{B'A} = \vec{0}$ soit B' barycentre de $\{(A,1); (C,1)\}$

• $\vec{C'A} + \vec{C'B} = \vec{0}$ soit C' barycentre de $\{(A,1); (B,1)\}$

De plus

G est le barycentre de $\{(B,1); (C,1); (A,1)\}$

G est le barycentre de $\{(A',2); (A,1)\}$

d'où $G \in (AA')$

G est le barycentre de $\{(A,1); (B,1); (C,1)\}$

G est le barycentre de $\{(C',2); (C,1)\}$

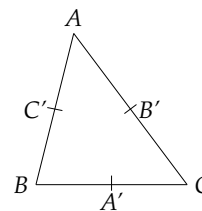
d'où $G \in (C'C)$

G est le barycentre de $\{(A,1); (C,1); (B,1)\}$

G est le barycentre de $\{(B',2); (B,1)\}$

d'où $G \in (B'B)$

On en déduit donc que les trois médianes sont concourantes



Chapitre 8

Produit scalaire

1. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan, le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note \vec{u}^2 et s'appelle carré scalaire.

Remarque 1

Par définition même du produit scalaire nous avons $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Remarque 2

Le produit scalaire est utilisé en physique dans la définition du travail d'une force.

$$W_{A \rightarrow B}^{\vec{F}} = \vec{AB} \cdot \vec{F} = AB \cdot F \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{F})$$

Propriété

Soient A, B et C trois points distincts deux à deux et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AH} \text{ sont de même sens.} \\ -AB \times AH & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{AH} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$$

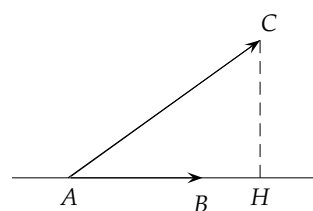
Démonstration

Par définition du produit scalaire

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$$

Or $AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AH$ si \vec{AB} et \vec{AC} sont dans le même sens

Or $AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = -AH$ si \vec{AB} et \vec{AC} sont opposés



Définition

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2. Propriété du produit scalaire

Propriété 1

Soit (\vec{i}, \vec{j}) , une base orthonormale, \vec{u} de coordonnée (x, y) et \vec{v} de coordonnée (x', y') dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans le repère (\vec{i}, \vec{j}) alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et

$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} = xx' + yy'$$

car $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

Propriété 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs du plan, alors

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Propriété 3

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan, on a les égalités:

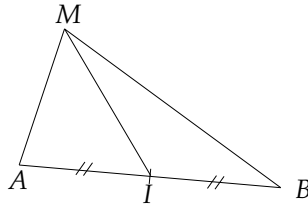
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

3. Applications

Théorème de la médiane

Soient A et B deux points distincts du plan, I le milieu de $[AB]$ alors pour tout point M du plan on a

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$
- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$



Démonstration

Montrons les deux premières propositions

$$MA^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 = (\vec{IA} - \vec{IM})^2 = IA^2 - 2\vec{IA} \cdot \vec{IM} + IM^2$$

$$MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = (\vec{IB} - \vec{IM})^2 = IB^2 - 2\vec{IB} \cdot \vec{IM} + IM^2 = IA^2 + 2\vec{IA} \cdot \vec{IM} + IM^2$$

$$\text{ainsi nous avons } MA^2 + MB^2 = 2IA^2 + 2IM^2 = 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + 2IM^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\text{ainsi nous avons } MA^2 - MB^2 = -4\vec{IA} \cdot \vec{IM} = -4\left(-\frac{\vec{AB}}{2}\right) \cdot \vec{IM} = 2\vec{AB} \cdot \vec{IM}$$

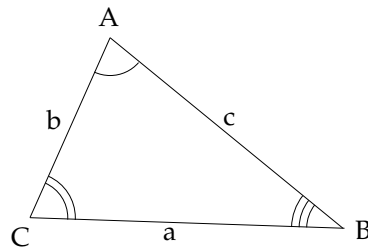
Montrons la dernière proposition

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) \\ &= MI^2 + \vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{MI} + \vec{IA} \cdot \vec{IB} \\ &= MI^2 + \vec{MI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IA}) + \vec{IA} \cdot \vec{IB} \end{aligned}$$

or I est le milieu de $[AB]$ donc $\vec{IB} + \vec{IA} = \vec{0}$ et $\vec{IA} \cdot \vec{IB} = -IA^2$ ainsi nous avons: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$

Théorème d'Al Kashi

Considérons un triangle ABC avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$



On a alors les relations suivantes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$

Démonstration

Démontrons la première relation

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Les autres relations se démontrent d'une manière analogue.

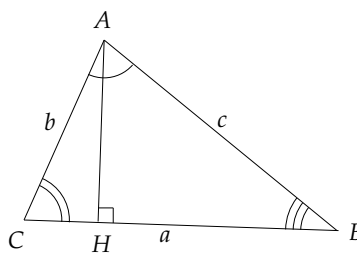
Formule des sinus

Soit ABC un triangle d'aire \mathcal{A} avec $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$ alors

$$\bullet \mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

$$\bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$$

Démonstration



Soit H le pied de la hauteur issue de A alors $\mathcal{A} = \frac{AH \times CB}{2}$, puisque $\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC}$

alors $AH = AC \times \sin \hat{C}$ On obtient: $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AC \times \sin \hat{C} \times BC = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$

On procède de la même façon pour les autres égalités.

Pour la deuxième proposition il suffit de diviser la première égalité par abc

Equations

- La droite orthogonale à \vec{n} et passant par A est $\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$
- Le cercle de diamètre $[AB]$ est $\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0\}$

Chapitre 9

Transformations

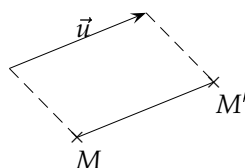
1. Translation

Définition

Soit \vec{u} un vecteur de l'espace \mathcal{E} . La translation de vecteur \vec{u} est l'application noté $t_{\vec{u}}$ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} définie de la manière suivante:

$$t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$



Remarque

La translation de vecteur nul est l'application identique.

Propriétés

- Une translation de l'espace réalise une bijection de l'espace \mathcal{E} dans \mathcal{E} , c'est à dire que tout point de l'espace admet un unique antécédent par cette translation.
- La translation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$

Propriété fondamentale

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur \vec{u} . Soient A et B deux points de l'espace.

Si $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Démonstration

Soient $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$ alors $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.

On a donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et donc $ABB'A'$ est un parallélogramme ainsi $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

2. Homothétie dans l'espace

Définition

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et soit Ω un point de l'espace.

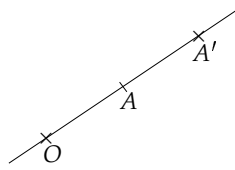
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application noté $h_{(\Omega,k)}$ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} définie de la manière suivante:

$$h_{(\Omega,k)} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

Exemple

Soit $h_{(O,2)}$ l'homothétie de centre O et de rapport 2 et soit A un point quelconque de l'espace et A' son image par $h_{(O,2)}$.
 Déterminer A' revient à trouver A' tel que $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$



Remarques

- L'homothétie de centre O et de rapport 1 est l'application identique.
- L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O .
- Soit $h_{(\Omega,k)}(A) = A'$ alors Ω, A, A' sont alignés.
- Le centre d'une homothétie de rapport différent de 1 est l'unique point invariant d'une homothétie.

Propriétés

- Une homothétie de l'espace réalise une bijection de l'espace \mathcal{E} dans \mathcal{E} c'est à dire que tout point de l'espace admet un unique antécédent par cette homothétie.
- L'homothétie réciproque de $h_{(\Omega,k)}$ est $h_{(\Omega, \frac{1}{k})}$

Propriété fondamentale

Soit $h_{(\Omega,k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k . Soient A et B deux points de l'espace.
 Si $A' = h_{(\Omega,k)}(A)$ et $B' = h_{(\Omega,k)}(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

Démonstration

Soit $h_{(\Omega,k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k

Soient $A' = h_{(\Omega,k)}(A)$ et $B' = h_{(\Omega,k)}(B)$ alors

$$\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A} \quad (I)$$

$$\overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B} \quad (II)$$

(II) - (I) donne

$$\overrightarrow{\Omega B'} - \overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega B} - k\overrightarrow{\Omega A}$$

$$\overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B'} = k(\overrightarrow{A'\Omega} + \overrightarrow{\Omega B})$$

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$

3. Propriétés des homothéties et des translations

Propriété 1

Une homothétie ou une translation conserve le barycentre.

Ainsi si f est une homothétie ou une translation et si G est le barycentre du système

$\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$

alors $f(G)$ est le barycentre du système $\{(f(A_1), \alpha_1); (f(A_2), \alpha_2); \dots; (f(A_n), \alpha_n)\}$

Démonstration

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k et G le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ alors $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ (I)

Or d'après la propriété fondamentale $f(G)f(A_n) = k\overrightarrow{GA_n}$ (II)

En multipliant par k la relation (I) nous avons $\alpha_1 k\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 k\overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n k\overrightarrow{GA_n} = k\vec{0} = \vec{0}$

en utilisant la relation (II) $\alpha_1 f(G)f(A_1) + \alpha_2 f(G)f(A_2) + \dots + \alpha_n f(G)f(A_n) = \vec{0}$

ce qui implique que $f(G)$ est le barycentre du système $\{(f(A_1), \alpha_1); (f(A_2), \alpha_2); \dots; (f(A_n), \alpha_n)\}$

Propriété 2

Soit f une homothétie ou une translation de l'espace, alors:

- L'image d'une droite par f est une droite qui est parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ tel que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$
- L'image d'un plan \mathcal{P} par f est un plan qui est parallèle à \mathcal{P}
- L'image d'un cercle (ou d'une sphère) de centre Ω par une translation est un cercle (ou une sphère) de même rayon et de centre Ω' image de Ω par la translation.
- L'image d'un cercle (ou d'une sphère) de centre Ω et de rayon R par une homothétie est un cercle (ou une sphère) de rayon $|k|R$ et de centre Ω' image de Ω par l'homothétie.

Propriété 3

Longueur, aire, volume, angles.

Par une translation, les longueurs, les aires et les volumes sont conservées.

Par une homothétie de rapport k , les longueurs sont multipliées par $|k|$, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par $|k|^3$.

Si f est une homothétie ou une translation alors f conserve les angles orientés, c'est à dire si A', B', C' sont les images de A, B et C par f alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

4. Méthodes

- Pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés il suffit de montrer qu'il existe une homothétie de centre A qui transforme B en C ou encore que A, B, C sont les images de trois points alignés par une homothétie ou une translation.
- Pour démontrer que deux droites sont parallèles il suffit de montrer que l'une est image de l'autre par une homothétie

Exemple

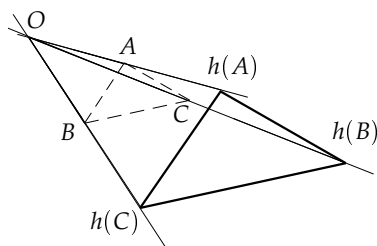
Considérons un triangle ABC et soit O un point distinct de A, B, C .

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.

1. Représenter les points $O, A, B, C, h(A), h(B), h(C)$, sur une figure.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Construire G' centre de gravité de $A'B'C'$
3. Comparer les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{h(A)h(B)}$
4. Quelle est l'image par h de la droite (BC)

Solution

1)



2) D'après la conservation du barycentre si G est le centre de gravité de ABC alors G' est le centre de gravité de $A'B'C'$

3) D'après la propriété de l'homothétie $\overrightarrow{h(A)h(B)} = 2\overrightarrow{AB}$

4) L'image d'une droite par une homothétie est une droite. En particulier l'image de la droite (BC) par h est la droite $(h(B)h(C))$

Chapitre 10

Géométrie dans l'espace

1. Plans et droite

Règles fondamentales

- Dans tout plan de l'espace, les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent.
- Par trois points non alignés A, B, C , passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC) .
- Si A et B sont deux points d'un plan \mathcal{P} , tous les points de la droite (AB) appartiennent à \mathcal{P} .
- L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.
- Si deux plans distincts ont un point commun, leur intersection est une droite qui passe par ce point.

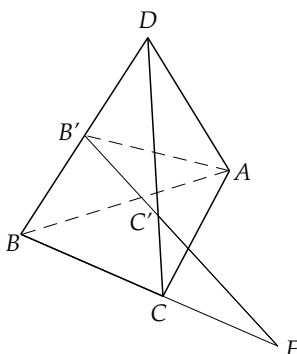
Exemple

$ABCD$ est un tétraèdre.

B' est un point de l'arête $[BD]$, distinct de B et de D .

C' est un point de l'arête $[CD]$, distinct de C et de D .

On suppose que les droites $(B'C')$ et (BC) du plan (BCD) se coupent en E . Trouver l'intersection des plans (ABC) et $(AB'C')$



(ABC) et $(AB'C')$ sont deux plans distincts ayant un point commun donc leur intersection est une droite.

B et C appartiennent à (ABC) donc tout point de (BC) appartient à (ABC) en particulier E appartient à (ABC)

B' et C' appartiennent à $(AB'C')$ donc tout point de $(B'C')$ appartient à $(AB'C')$ en particulier E appartient à $(AB'C')$

donc $E \in (ABC) \cap (AB'C')$ or $A \in (ABC) \cap (AB'C')$, puisque $A \neq E$ alors (AE) est une droite.

Ainsi (AE) est l'intersection de (ABC) et $(AB'C')$.

2. Parallélisme dans l'espace

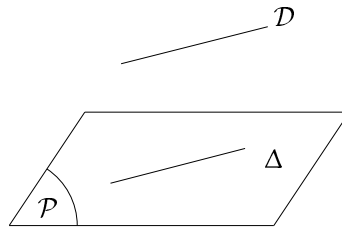
Droites parallèles

- a) Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont deux droites parallèles alors tout plan qui coupe \mathcal{D} coupe \mathcal{D}' .
- b) Si $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' // \mathcal{D}''$ alors $\mathcal{D} // \mathcal{D}''$.
- c) Par un point A donné de l'espace il passe une et une seule droite \mathcal{D} parallèle à une droite donnée.

Droites parallèles à un plan

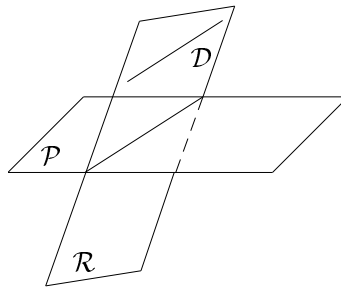
a) Si une droite \mathcal{D} est parallèle à une droite Δ incluse dans un plan \mathcal{P} alors \mathcal{D} est parallèle à ce plan \mathcal{P} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} // \Delta \\ \Delta \subset \mathcal{P} \end{array} \right. \text{ alors } \mathcal{D} // \mathcal{P}$$



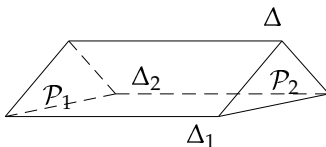
b) Si une droite \mathcal{D} est parallèle à un plan \mathcal{P} et si \mathcal{R} est un plan contenant \mathcal{D} et sécant avec \mathcal{P} alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}$ est une droite parallèle à \mathcal{D}

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} // \mathcal{P} \\ \mathcal{D} \subset \mathcal{R} \\ \mathcal{R}, \mathcal{P} \text{ sécants} \end{array} \right. \text{ alors } \mathcal{R} \cap \mathcal{P} // \mathcal{D}$$



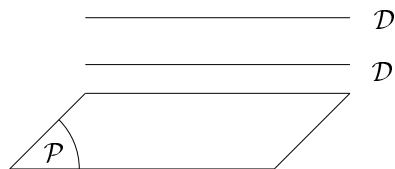
c) **Théorème du toit:** Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles. Soit \mathcal{P}_1 un plan contenant Δ_1 et \mathcal{P}_2 un plan contenant Δ_2 .

Si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants, alors leur droite commune Δ est parallèle à Δ_1 et Δ_2



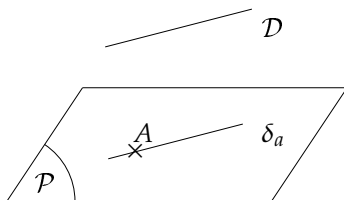
d) Si \mathcal{D}' est une droite parallèle à une droite \mathcal{D} , Si \mathcal{D} est une droite parallèle à un plan \mathcal{P} alors \mathcal{D}' est une droite parallèle au plan \mathcal{P}

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} // \mathcal{D}' \\ \mathcal{D} // \mathcal{P} \end{array} \right. \text{ alors } \mathcal{D}' // \mathcal{P}$$



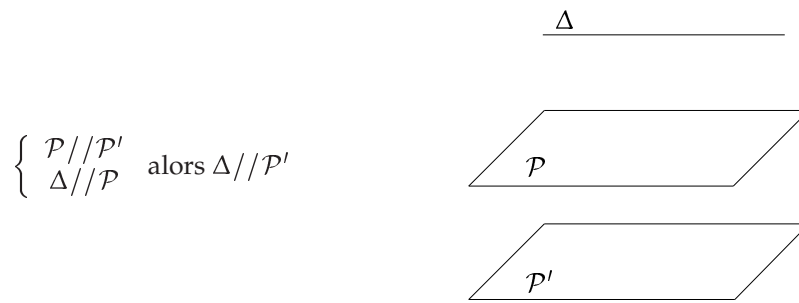
e) Soit \mathcal{D} une droite parallèle à \mathcal{P}

Soit A un point de \mathcal{P} alors la droite δ_A parallèle à \mathcal{D} et passant par A est incluse dans \mathcal{P}

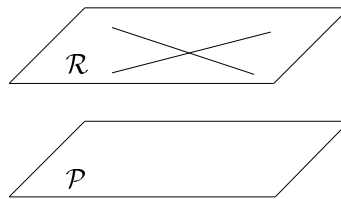


Plans parallèles

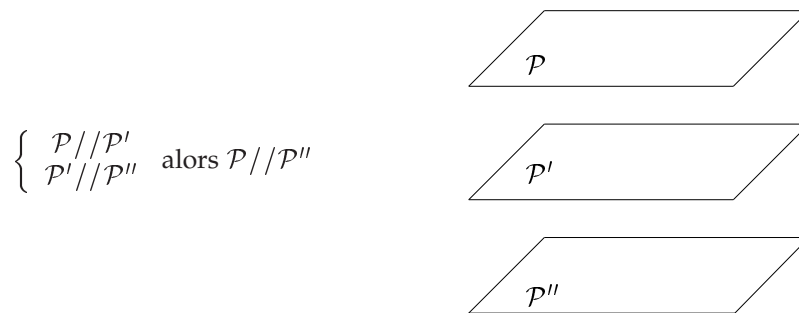
a) Soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans parallèles alors toute droite Δ parallèle à \mathcal{P} est parallèle à \mathcal{P}'



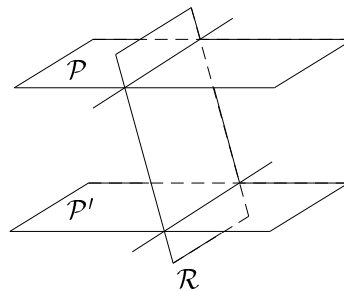
b) Deux droites sécantes parallèles à un même plan \mathcal{P} définissent un plan \mathcal{R} parallèle au plan \mathcal{P}



c) Si \mathcal{P} est parallèle à \mathcal{P}' et si \mathcal{P}' est parallèle à \mathcal{P}'' alors \mathcal{P} est parallèle à \mathcal{P}''

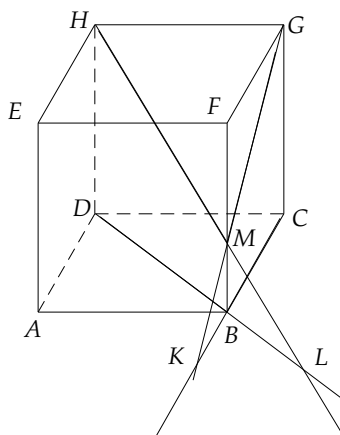


d) Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont deux plans parallèles, alors tout plan \mathcal{R} qui coupe l'un de ces deux plans coupe aussi l'autre, et les droites $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ et $\mathcal{P}' \cap \mathcal{R}$ sont parallèles



Exemple

Soit $ABCDEFGH$ un cube, et M appartient à l'arête $[FB]$ tel que $M \neq F$ et $M \neq B$
Construire les points d'intersections K et L des droites (GM) et (HM) avec le plan (ABC)



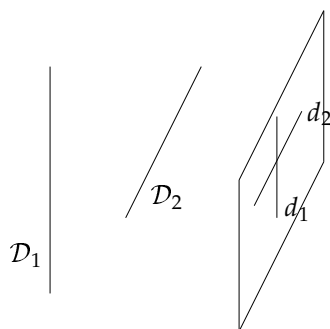
(GM) n'est pas parallèle au plan (ABC) . L'intersection de (GM) et (ABC) est donc un point.
 (BC) et (MG) sont deux droites sécantes du plan $(FGCB)$: Soit K l'intersection de (GM) et (BC) .
Ainsi nous avons $K \in (GM)$ et $K \in (ABC)$ ainsi $\{K\} = (GM) \cap (ABC)$.
 (HM) n'est pas parallèle au plan (ABC) . L'intersection de (HM) et (ABC) est donc un point.
Comme (HD) et (MB) sont parallèles, elles définissent un plan \mathcal{P}
 (BD) (incluse dans (ABC)) et (HM) sont deux droites sécantes de \mathcal{P} : elles se coupent en un point L .
Ainsi nous avons $L \in (HM)$ et $L \in (ABC)$ ainsi $\{L\} = (HM) \cap (ABC)$.

3. Orthogonalité dans l'espace

Définition

Deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont orthogonales s'il existe un plan \mathcal{P} contenant deux droites d_1 et d_2 telles que:

- d_1 est parallèle à \mathcal{D}_1 et d_2 est parallèle à \mathcal{D}_2 .
- d_1 est perpendiculaire à d_2 dans le plan \mathcal{P} .

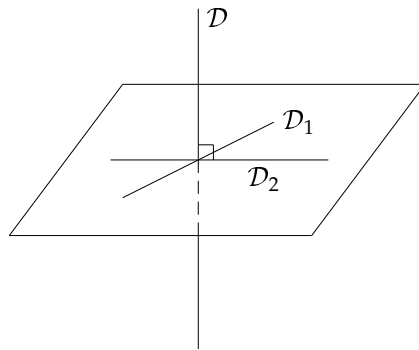


Remarque

Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires; elles ne sont perpendiculaires que lorsqu'elles sont coplanaires.

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

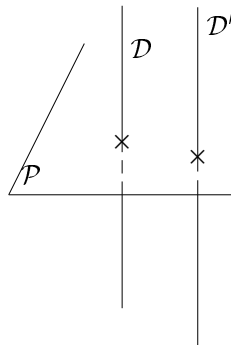
Une droite \mathcal{D} est perpendiculaire à un plan \mathcal{P} si et seulement si \mathcal{D} est orthogonal à deux droites sécantes dans ce plan



Propriété

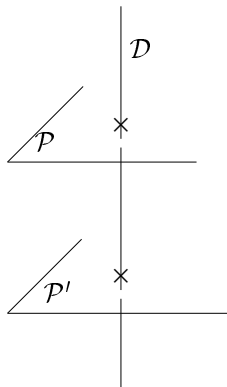
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre

$$\begin{cases} \mathcal{D}' // \mathcal{D} \\ \mathcal{P} \perp \mathcal{D} \end{cases} \text{ alors } \mathcal{P} \perp \mathcal{D}'$$



- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

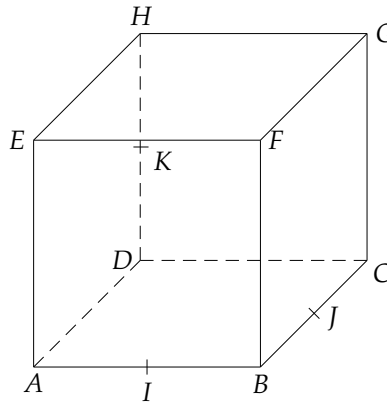
$$\begin{cases} \mathcal{P} // \mathcal{P}' \\ \mathcal{D} \perp \mathcal{P} \end{cases} \text{ alors } \mathcal{D} \perp \mathcal{P}'$$



- Deux plans distincts, orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

4. Exemples de la section plane d'un cube

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.
 Soit I le milieu de $[AB]$; Soit J le milieu de $[BC]$; Soit K le milieu de $[DH]$.
 Construire la section du cube avec le plan (IJK) revient à déterminer les droites d'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube.



(IJK) n'étant parallèle à aucune faces du cube alors l'intersection de (IJK) avec les faces du cube sont des droites.
 Pour trouver l'intersection d'une face du cube avec (IJK) il suffit de déterminer deux points distincts appartenant à l'intersection de la face du cube et de (IJK) . L'intersection de la face du cube et de (IJK) est la droite passant par ces deux points.

• Intersection de (IJK) et (ABC)

$$\left. \begin{array}{l} I \in (IJK) \\ I \in (ABC) \text{ car } I \text{ milieu de } [AB] \\ J \in (IJK) \\ J \in (ABC) \text{ car } J \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\} \begin{array}{l} I \in (IJK) \cap (ABC) \\ J \in (IJK) \cap (ABC) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} I \in (IJK) \\ I \in (ABC) \\ J \in (IJK) \\ J \in (ABC) \end{array}} \right\} I \neq J \text{ alors } (IJK) \cap (ABC) = (IJ)$$

$$\boxed{(IJK) \cap (ABC) = (IJ)}$$

• Intersection de (IJK) et (ADH)

(AD) et (IJ) sont coplanaires $(AD) \cap (IJ) = Z$.

$$\left. \begin{array}{l} Z \in (IJK) \text{ car } Z \text{ appartient à } (IJ) \\ Z \in (ADH) \text{ car } Z \text{ appartient à } (AD) \\ K \in (IJK) \\ K \in (ADH) \text{ car } K \text{ milieu de } [DH] \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z \in (IJK) \cap (ADH) \\ K \in (IJK) \cap (ADH) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} Z \in (IJK) \\ Z \in (ADH) \\ K \in (IJK) \\ K \in (ADH) \end{array}} \right\} Z \neq K \text{ alors } (IJK) \cap (ADH) = (ZK)$$

$$\boxed{(IJK) \cap (ADH) = (ZK)}$$

• Intersection de (IJK) et (DCG)

En faisant une démonstration analogue, on obtient $(IJ) \cap (CD) = W$ et donc $\boxed{(IJK) \cap (DCG) = (KW)}$

• Intersection de (IJK) et (BCG)

$$\left. \begin{array}{l} T \in (IJK) \text{ car } T \in (KW) \text{ et } (KW) \subset (IJK) \\ T \in (BCG) \text{ car } T \in (CG) \\ J \in (IJK) \\ J \in (BCG) \text{ car } J \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\} \begin{array}{l} T \in (IJK) \cap (BCG) \\ J \in (IJK) \cap (BCG) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} T \in (IJK) \\ T \in (BCG) \\ J \in (IJK) \\ J \in (BCG) \end{array}} \right\} T \neq J \text{ alors } (IJK) \cap (BCG) = (JT)$$

$$\boxed{(IJK) \cap (BCG) = (JT)}$$

• Intersection de (IJK) et (ABF)

En faisant une démonstration analogue on obtient: $(KZ) \cap (EA) = U$ or $U \in (IJK)$ et $U \in (ABF)$ alors $U \in (IJK) \cap (ABF)$

Autre démonstration possible: (ABF) est parallèle à (DCG) , (IJK) est un plan qui coupe (DCG) suivant la droite (KT) alors (IJK) coupe (ABF) suivant une droite parallèle à (KT) , or $I \in (IJK) \cap (ABF)$, ainsi $(IJK) \cap (ABF)$ est la droite parallèle à (KT) et passant par I

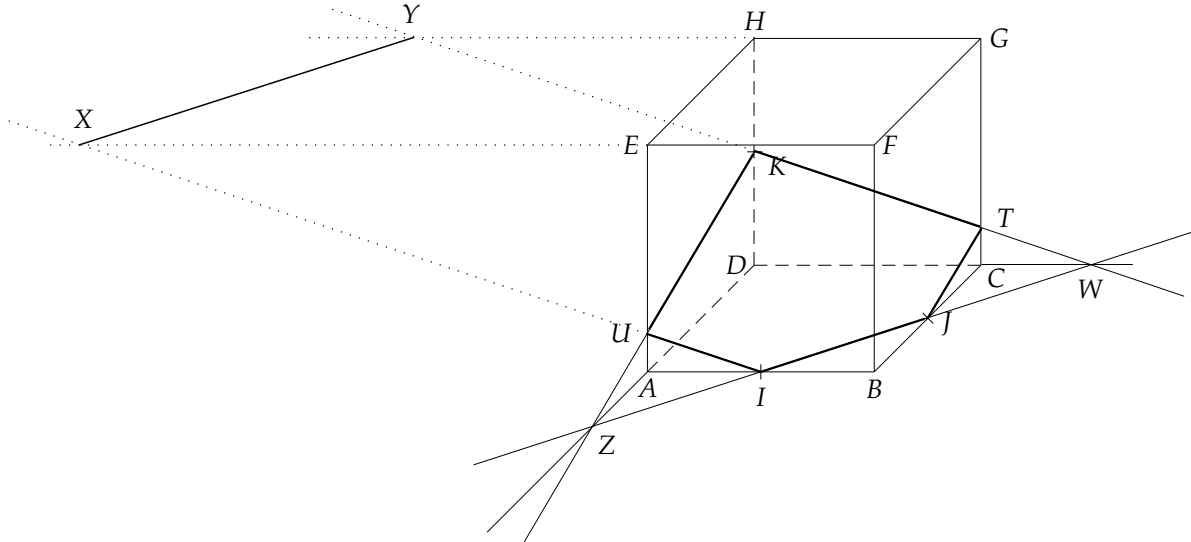
$$\boxed{(IJK) \cap (ABF) = (IU)}$$

Complément: intersection du plan (IJK) et (EFG)

(IU) est incluse dans (IJK) , (EF) est incluse dans (EFG) . (IU) et (EF) ne sont pas parallèles alors $(IU) \cap (EF) = X$ donc $X \in (IJK) \cap (EFG)$.

(KT) est incluse dans (IJK) , (HG) est incluse dans (EFG) . (KT) et (HG) ne sont pas parallèles alors $(KT) \cap (HG) = Y$ donc $Y \in (IJK) \cap (EFG)$.

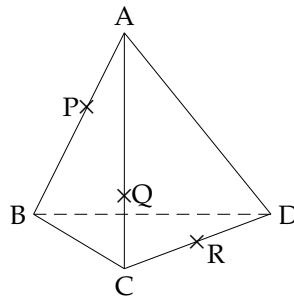
Ainsi l'intersection de (IJK) et (EFG) est la droite (XY)



5. Exemples de la section plane d'un tétraèdre

On considère le tétraèdre ABCD ci-contre. Soit P appartenant à $[AB]$; Soit Q appartenant à $[AC]$; (PQ) non parallèle à (BC) . Soit R appartenant à $[CD]$.

Construire la section du tétraèdre avec le plan (PQR) revient à déterminer les droites d'intersection du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre.



• Intersection de (PQR) et (ABC)

P et Q appartenant à la fois à (ABC) et (PQR) alors

$$\boxed{(ABC) \cap (PQR) = (PQ)}$$

• Intersection de (PQR) et (ACD)

R et Q appartenant à la fois à (ACD) et (PQR) alors

$$\boxed{(ACD) \cap (PQR) = (QR)}$$

• Intersection de (PQR) et (BCD)

(PQ) et (BC) sont deux droites coplanaires et non parallèle alors $(PQ) \cap (BC) = Z$

$$\left. \begin{array}{l} Z \in (BCD) \text{ car } Z \in (BC) \\ Z \in (PQR) \text{ car } Z \in (PQ) \\ R \in (BCD) \text{ car } R \in (CD) \\ R \in (PQR) \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z \in (BCD) \cap (PQR) \\ R \in (BCD) \cap (PQR) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} Z \in (BCD) \cap (PQR) \\ R \in (BCD) \cap (PQR) \end{array}} \right\} Z \neq R \text{ alors } (BCD) \cap (PQR) = (RZ)$$

$$\boxed{(BCD) \cap (PQR) = (RZ)}$$

• Intersection de (PQR) et (ABD)

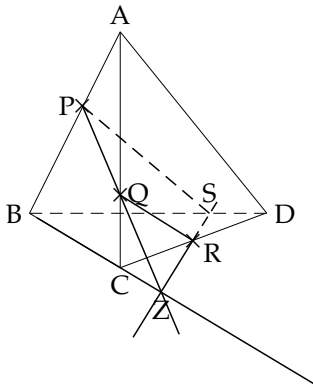
(RZ) et (BD) sont deux droites coplanaires et non parallèle alors $(RZ) \cap (BD) = S$

$$\left. \begin{array}{l} P \in (ABD) \text{ car } P \in (AB) \\ P \in (PQR) \end{array} \right\} P \in (ABD) \cap (PQR)$$

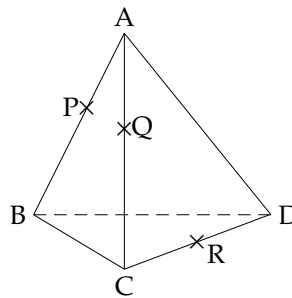
$$\left. \begin{array}{l} S \in (ABD) \text{ car } S \in (BD) \\ S \in (PQR) \text{ car } S \in (RZ) \text{ et } (RZ) \subset (PQR) \end{array} \right\} S \in (ABD) \cap (PQR)$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in (ABD) \cap (PQR) \\ S \in (ABD) \cap (PQR) \end{array} \right\} P \neq S \text{ alors } (ABD) \cap (PQR) = (SP)$$

$$\boxed{(BCD) \cap (PQR) = (RZ)}$$



On considère le tétraèdre ABCD ci-contre. Soit P appartenant à $[AB]$; Soit Q appartenant à $[AC]$; (PQ) non parallèle à (BC) . Soit R appartenant à $[CD]$. Construire la section du tétraèdre avec le plan (PQR) revient à déterminer les droites d'intersection du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre.



• Intersection de (PQR) et (ABC)

P et Q appartenant à la fois à (ABC) et (PQR) alors $\boxed{(ABC) \cap (PQR) = (PQ)}$

• Intersection de (PQR) et (ACD)

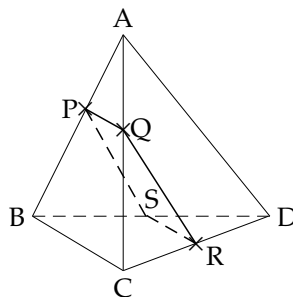
R et Q appartenant à la fois à (ACD) et (PQR) alors $\boxed{(ACD) \cap (PQR) = (QR)}$

• Intersection de (PQR) et (BCD) (PQ) et (BC) sont parallèles alors d'après le théorème du toit (PQR) et (BCD) se coupent suivant une droite \mathcal{D} passant par R et parallèle à (PQ)

• Intersection de (PQR) et (ABD)

Soit $S = \mathcal{D} \cap (BD)$

P et S appartenant à la fois à (ABD) et (PQR) alors $\boxed{(ABD) \cap (PQR) = (PQ)}$



Chapitre 11

Géométrie vectorielle

1. Vecteur de l'espace

Introduction

Soient A et B deux points de l'espace.

A tout point M de l'espace il existe un unique point M' tels que $ABM'M$ soit un parallélogramme.

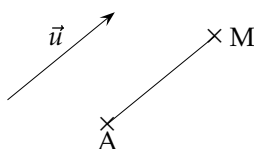
On dit que les couples de points (M, M') représentent tous le même vecteur \vec{u} de l'espace. On note

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$$

Il conviendra également de retenir:

Soit \vec{u} un vecteur de l'espace \mathcal{E} et soit A un point de l'espace, alors il existe un unique point M de

l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$



Définition

Un vecteur \overrightarrow{AB} est caractérisé par

sa direction: la direction de la droite (AB)

son sens: de A vers B

sa norme, notée $\|AB\|$: la distance de A à B

Propriétés

Soient \vec{u} , \vec{v} , et \vec{w} trois vecteurs de l'espace.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

- $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

Vecteurs colinéaires et coplanaires

- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

- Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont coplanaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

Remarque

| Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

2. Caractérisation de la droite et du plan

Définition

Soit A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur de l'espace.

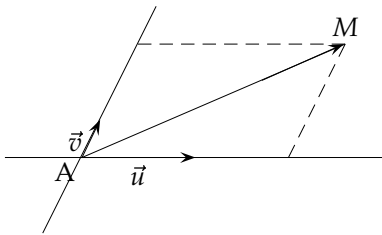
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ où λ parcourt \mathbb{R} est appelé droite de l'espace.

(A, \vec{u}) est appelé repère de la droite. λ est l'abscisse du point M dans le repère (A, \vec{u})

Définition

Soit A un point de l'espace, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace, alors

L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ où λ et μ parcourent \mathbb{R} est un plan. (A, \vec{u}, \vec{v}) est appelé repère du plan. (λ, μ) sont les coordonnées du point M dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v}) .



3. Repère de l'espace

Définition

Soit O un point de l'espace et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires de l'espace, alors pour tout point M de l'espace il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

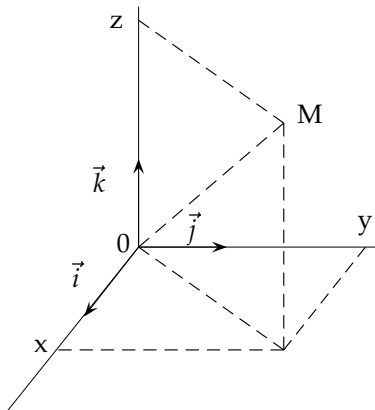
Le triplet (x, y, z) s'appelle coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

x s'appelle **abscisse** du point M

y s'appelle **ordonnée** du point M

z s'appelle **cote** du point M

On dit aussi que (x, y, z) sont les coordonnées de \overrightarrow{OM} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



Remarque

Dire qu'un vecteur \vec{u} a pour coordonnée (x, y, z) sans préciser de base particulière, n'a pas de sens. Les coordonnées d'un vecteur sont nécessairement rattachées à une base. Ainsi, un vecteur a des coordonnées différentes dans deux bases différentes.

Propriétés

Considérons l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

• Deux vecteurs de l'espace \vec{u} et \vec{v} sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

• Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace et λ un nombre réel alors

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Distance de deux point

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors

$$AB = ||AB|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

4. Méthodes

- Pour montrer que trois points A, B, C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
- Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) de l'espace sont parallèles, il suffit de montrer qu'il existe k tels que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
- Pour montrer que trois points sont coplanaires, il suffit de montrer que l'un d'eux s'exprime en fonction des deux autres.

Chapitre 12

Géométrie analytique

1. Equation cartésienne

Equation d'une droite dans le plan

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b deux réels dont l'un n'est pas nul.

Remarque

Soit \mathcal{D} une droite du plan,
 si \mathcal{D} est parallèle à l'axe des ordonnées alors une équation de \mathcal{D} s'écrit $x = k$,
 si \mathcal{D} n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors une équation de \mathcal{D} s'écrit $y = ax + b$

Exemple

Soit $A(2;3)$ et $B(-1;4)$ deux points, alors déterminons une équation de (AB)
 A et B ont des abscisses différentes alors (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, une équation de (AB) s'écrit:
 $y = ax + b$.
 Les points A et B appartiennent à (AB) alors les coordonnées de A et B vérifient l'équation de (AB) . Ainsi nous avons
 le système suivant à résoudre: $\begin{cases} 3 = 2a + b \\ 4 = -a + b \end{cases}$
 Les solutions de ce système sont: $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{11}{3}$ et donc une équation de (AB) est $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Propriétés

Soit $ax + by + c = 0$ l'équation d'une droite \mathcal{D} alors

- le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D}
- le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D}

Exemple

Trouver l'équation d'une droite \mathcal{D} passant par $A(x_0, y_0)$ et parallèle à Δ d'équation $ax + by + c = 0$
 $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ .
 $M(x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires soit $(x - x_0) \times a = -b(y - y_0)$
 L'équation recherchée est donc $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Equation cartésienne d'un cercle

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon R et de centre $\Omega(a, b)$ alors une équation cartésienne de \mathcal{C} dans un repère orthonormal est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Démonstration

Si le cercle est défini par son diamètre AB alors on a $M(x, y) \in \mathcal{C} \iff \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$
 Si le cercle est défini par son centre Ω et son rayon R alors on a $M(x, y) \in \mathcal{C} \iff AM = R$
 En traduisant en terme de coordonnées le premier ou le deuxième cas on obtient une équation de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

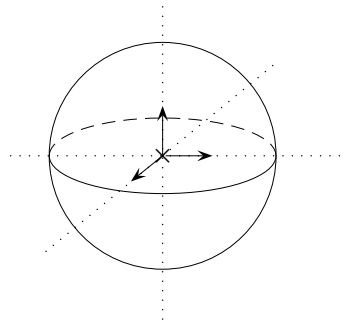
2. Equations cartésiennes dans l'espace

Plans parallèles

- Tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation cartésienne de la forme $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- Tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation cartésienne de la forme $y = \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$
- Tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation cartésienne de la forme $x = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$

Sphère

Une sphère de centre O et de rayon R , a pour équation cartésienne: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

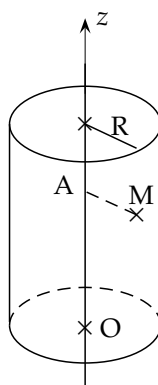


Démonstration

$M(x; y; z)$ appartient à la sphère de centre O et de rayon R si $OM = R$ c'est à dire $OM^2 = R^2$ en traduisant en terme de coordonnées, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Cylindre de révolution

Le cylindre de rayon R , admettant l'axe des cotes pour axe de révolution, a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$



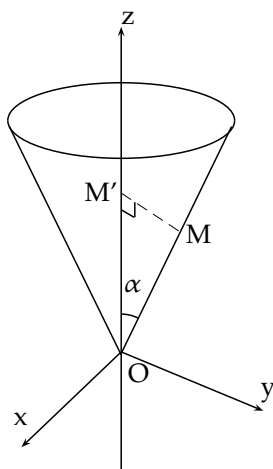
Démonstration

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $A(0; 0; z)$ un point appartenant à (O_z) et de même cote que M alors M appartient au cylindre de rayon R et d'axe (O_z) si $AM = R$ alors $AM^2 = R^2$.

On en déduit l'équation $x^2 + y^2 = R^2$

Cône de révolution

Le cône de révolution de sommet O , admettant l'axe des cotes pour axe de révolution, a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - \beta z^2 = 0$ où β est un réel strictement positif.



Démonstration

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(0; 0; z)$ un point appartenant à (O_z) et de même cote que M .

Si M appartient au cône de révolution de sommet O alors $\tan \alpha = \frac{MM'}{OM'} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|z|}$ soit

$$|z| \tan \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 \tan^2 \alpha = x^2 + y^2$$

On obtient donc $x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$ en posant $\beta = \tan^2 \alpha$ on obtient $x^2 + y^2 - \beta z^2 = 0$

Chapitre 13

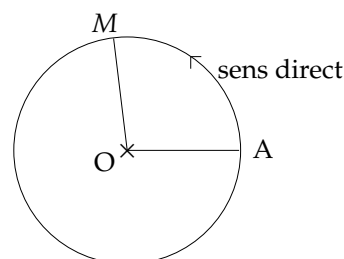
Angle et trigonométrie

1. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrie

Définition

Il existe deux manières de parcourir un cercle \mathcal{C} :

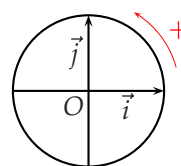
- Le sens contraire des aiguilles d'une montre appelé **sens direct** ou **sens trigonométrique**
- Le sens des aiguilles d'une montre appelé **sens indirect**



Définition

Soit un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.



Définition

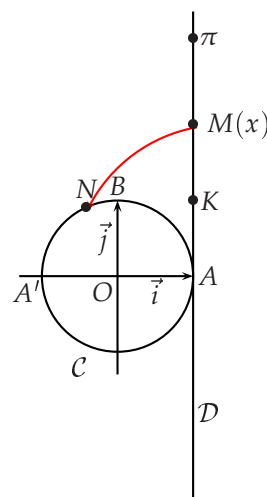
Soit la droite \mathcal{D} tangente en A au cercle trigonométrique \mathcal{C} .

Soit K de coordonnée $(1; 1)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors $(A; \vec{AK})$ est un repère de \mathcal{D}

• Imaginons que la droite \mathcal{D} soit une ficelle. Si on enroule cette ficelle autour du cercle \mathcal{C} , un point M d'abscisse x de \mathcal{D} coïncide avec un point N du cercle (plusieurs tours de cercle étant possible pour parvenir à cette correspondance). On établit ainsi une correspondance entre les nombres réels (abscisse du point M) et les points de \mathcal{C} .

Par exemple au nombre π on fait correspondre le point A' , mais $\pi + 2\pi$, $\pi + 4\pi$ sont également des nombres réels auxquels on fait correspondre le point A'

• Inversement à tout point N du cercle \mathcal{C} on associe tous les nombres réels (abscisse du point M de \mathcal{D}) qui sont associés aux enroulements possibles autour de \mathcal{C} pour aller de A vers N



Repérage d'un point du cercle \mathcal{C}

A tout point M du cercle \mathcal{C} on associe une famille de nombre réels tels que

- Si t est l'un d'entre eux, tous les autres sont de la forme $t + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- Il en existe un unique qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi[$. (C'est le nombre réel associé au plus petit trajet entre A et N sur le cercle dans le sens direct ou indirect)

2. Mesure des angles orientés de vecteurs

Définition

Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} qui coupent respectivement le cercle trigonométrique \mathcal{C} en M et N auxquels on associe les nombres réels m et n au sens de la définition du paragraphe 1, alors une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) est le nombre réel $n - m$

Propriété

Tout angle orienté admet une infinité de mesures.

Si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ alors les autres mesures s'écrivent $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On note $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha(2\pi)$ et on lit (\vec{u}, \vec{v}) a pour mesure α modulo 2π

Mesure principale

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ appelée mesure principale de cet angle orienté.

Propriétés

• Relation de Chasles

Pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ on a $(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2\pi)$

• Angles associés à l'angle (\vec{u}, \vec{v})

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \quad (2\pi)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v}) \quad (2\pi)$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \quad (2\pi)$$

• Alignement

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• cocyclicité (points appartenant à un même cercle)

Quatre points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Angle inscrit

Pour tout point M (distinct de A et B) d'un cercle de centre O et passant par A et B , on a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2 \times (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Lignes trigonométriques

Définition

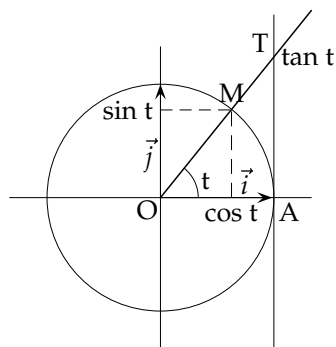
Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O .

On appelle **cosinus de t** , noté $\cos t$, l'abscisse du point M

On appelle **sinus de t** , noté $\sin t$, l'ordonnée du point M .

La **tangente de t** est le nombre $\frac{\sin t}{\cos t}$

Il s'agit de l'abscisse du point T dans le repère (A, \vec{j})



Propriétés

Pour tout réel x dans \mathbb{R} :

$$\bullet -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\bullet \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Propriétés

Pour tout réel x on a :

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

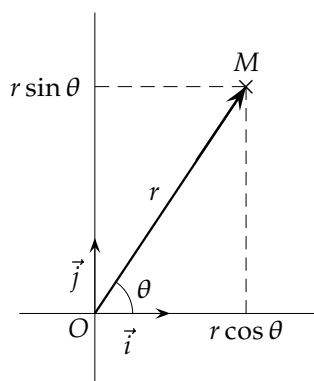
4. Repérage polaire d'un point du plan

Coordonnées polaires d'un point M

Soit M un point du plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

Le couple (r, θ) est appelé couple de coordonnées polaire de M dans le repère (O, \vec{i}) avec $r = OM$ et θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

De plus si M a pour coordonnées polaires (r, θ) dans le repère (O, \vec{i}) alors on a $\overrightarrow{OM} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$



Lien entre repérage polaire et cartésien

Soit M un point du plan distinct de O . Considérons :

(r, θ) ses coordonnées polaire dans (O, \vec{i}) et (x, y) ses coordonnées cartésiennes dans (O, \vec{i}, \vec{j})

alors nous avons :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta$$

5. Formules trigonométriques

Formules d'addition

Pour tous réels a et b , nous avons

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Formules de duplication

Pour tous réels a , nous avons

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

6. Résolution de $\cos x = a$ et $\sin x = b$

Résolution de $\cos x = a$

Si $|a| > 1$ alors pas de solution

Si $|a| \leq 1$ alors il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$ L'équation devient alors $\cos x = \cos \alpha$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple

Résoudre $2 \cos 3x + 1 = 0$ revient à résoudre $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ soit $\cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3}$:

$$\begin{cases} 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Résolution de $\sin x = a$

Si $|a| > 1$ alors pas de solution

Si $|a| \leq 1$ alors il existe $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \alpha = a$ L'équation devient alors $\sin x = \sin \alpha$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple

Résoudre $\sqrt{2} \sin 3x + 1 = 0$ revient à résoudre $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Chapitre 14

Statistique

1. Rappel

En statistique	En mathématiques	En langage courant
Population	Ensemble P	Ensemble des objets, individus, mesure étudiés
Individu	Élément de P	Objet, individu, mesure, ...
Caractère caractère quantitatif caractère qualitatif	Application f $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ $f : P \rightarrow A (A \not\subseteq \mathbb{R})$	Aspect des objets étudiés. Les données sont numériques. Les données ne sont pas numériques.
Modalité caractère quantitatif discret caractère quantitatif continu	Image par f des éléments de P $f(P)$ sont des valeurs isolées $f(P)$ est un intervalle	Valeur que peut prendre le caractère. Valeurs isolées que l'on peut dénombrer. Toute valeur d'un intervalle.
Classe	Partie de l'ensembles des modalités	Regrouper des modalités.
Effectif effectif total effectif cumulé croissant	n_i $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ $n_1 + n_2 + \dots + n_p$	Nombre d'individu ayant la même modalité. Nombre total d'objets. Somme des effectifs.
Mode • caractère discret Mode • caractère continu Classe modale Mode		Valeur du plus grand effectif. Valeur du plus grand effectif. Centre de la classe modale.
Fréquence	$F = \frac{n_i}{N}$	Rapport: effectif d'une valeur par effectif total.
Etendue		Différence entre les valeurs extrêmes.

Médiane:

c'est la valeur du caractère qui permet de partager la population N en deux groupes de même effectif.

- Cas d'un caractère quantitatif discret:

Si N est impair, la médiane c'est la valeur du caractère observé au rang $(N + 1)/2$

Si N est pair, la médiane n'est pas définie, mais on convient de prendre pour médiane la moyenne des caractères observés au rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$

Ainsi si les notes d'un élève sont: 3, 6, 6, 10, 10, 14, 19 alors la médiane est 10

Ainsi si les notes d'un élève sont 3, 6, 6, 10, 11, 14, 14, 19 alors la médiane est $(10+11)/2$

- Cas d'un caractère quantitatif continu: on construit la courbe des fréquences cumulées, la médiane est l'antécédent de 0,5.

Moyenne arithmétique pondérée

La moyenne arithmétique pondérée notée \bar{x} est donnée par la formule :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i \text{ avec } N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

n_i est l'effectif de la valeur x_i .

Exemple 1

Etude d'une série statistique à caractère discret

Dans une classe de 25 élèves de première, les résultats à un devoir de mathématiques sont les suivants :

7; 9; 15; 11; 10; 10; 16; 7; 8; 14; 15; 9; 10; 10; 14; 15; 18; 12; 8; 14; 8; 8; 10; 11; 15

La population est l'ensemble des devoirs de mathématiques

Le caractère étudié est la note obtenue par chaque élève

Les valeurs prises par le caractère sont les entiers compris entre 7 et 18.

Faisons apparaître dans le tableau suivant les notes rangées dans l'ordre croissant, l'effectif, l'effectif cumulé ainsi que la fréquence :

<i>note</i>	7	8	9	10	11	12	14	15	16	18
<i>effectif</i>	2	4	2	5	2	1	3	4	1	1
<i>effectif cumulé</i>	2	6	8	13	15	16	19	23	24	25
<i>fréquence</i>	0,08	0,16	0,08	0,2	0,08	0,04	0,12	0,16	0,04	0,04

Parmi les notes obtenus, on relève les résultats suivants :

2 élèves ont eu 7, 4 élèves ont eu 8, 2 élèves ont eu 9 etc...

On remarque que le dernier effectif cumulé correspond bien au nombre d'élèves dans la classe

La fréquence de la note 7 se calcule en divisant 2 (soit le nombre d'élèves qui ont obtenus 7 au devoir) par le nombre d'élèves total soit 25, on fait de même pour les autres notes.

- *L'étendue est la différence entre la valeur minimale 7 et la valeur maximale 18 soit 11.*
- *Le mode est la valeur qui correspond au plus grand effectif, soit 10.*
- *La médiane est la valeur qui sépare la population en deux parties égales: $(25 + 1)/2 = 13$ élèves donc la médiane est la note obtenue par le 13^{ème} élève, or le tableau des effectifs cumulés fait apparaître une note qui correspond à 10, ainsi la médiane est 10.*

Exemple 2

Etude d'une série statistique à caractère continu

Dans un lycée, on a relevé la taille des élèves.

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

<i>Taille en cm</i>	[150; 160[[160; 165[[165; 170[[170; 175[[175; 180[[180; 200[
<i>effectif</i>	34	42	80	59	50	35

Quelle est l'étendue, la classe modale, le mode, la médiane et la moyenne de cette série statistique?

- *L'étendue est la différence entre la taille maximale (200 cm) et la taille minimale (150 cm).*

L'étendue est donc $200 - 150 = 50$.

- *La classe modale est la classe pour laquelle l'effectif est le plus important : ici c'est la classe qui correspond aux tailles comprises entre 165 et 170 cm.*

La classe modale est donc [165; 170[.

- *Le mode est le centre de la classe modale soit le centre de l'intervalle [165; 170[.*

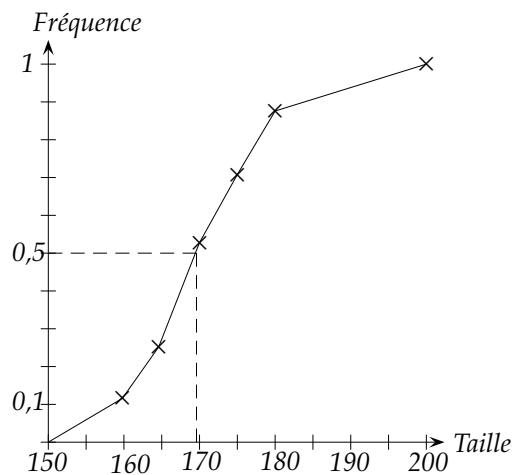
Le mode est donc 167,5.

- *Dans l'étude d'une série statistique à caractère continu, la médiane est la valeur qui correspond à une fréquence de 0,5.*

On calcule donc la ligne des fréquences puis des fréquences cumulées :

<i>Taille en cm</i>	[150; 160[[160; 165[[165; 170[[170; 175[[175; 180[[180; 200[
<i>Effectif</i>	34	42	80	59	50	35
<i>Fréquence</i>	0,11	0,14	0,27	0,20	0,16	0,12
<i>Fréq. Cum.</i>	0,11	0,25	0,52	0,72	0,88	1

Puis on construit la courbe des fréquences cumulées :



Après lecture graphique, la médiane est environ 169 cm.

• On calcule la moyenne à l'aide de la formule de la moyenne pondérée en prenant le centre de chaque intervalle pour valeur :

$$\frac{34 \times 155 + 42 \times 162,5 + 80 \times 167,5 + 59 \times 172,5 + 50 \times 177,5 + 35 \times 190}{34 + 42 + 80 + 59 + 50 + 35} = \frac{51197,5}{300} = 170,66$$

La moyenne est donc 170,66 cm.

2. Propriété de la moyenne

Propriété 1

Considérons une série statistique (x_1, x_2, \dots, x_n) de N éléments, réparties en p sous groupes ayant respectivement n_1, n_2, \dots, n_p éléments (tels que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$) et de moyennes respectives

$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p$ alors la série statistique a pour moyenne $m = \frac{n_1 \bar{y}_1 + n_2 \bar{y}_2 + \dots + n_p \bar{y}_p}{N}$

Propriété 2

Soient a et b deux réels fixés et une série statistique (x_1, x_2, \dots, x_n) de N éléments et de moyenne \bar{x} alors la série statistique (y_1, y_2, \dots, y_n) , avec $y_i = ax_i + b$ pour i variant de 1 à n a pour moyenne $\bar{y} = a\bar{x} + b$

Exemple

Dans un lycée, il y a quatre classes de première contenant respectivement 25, 26, 30 et 29 élèves.

A un contrôle commun de mathématiques, les moyennes des classes sont respectivement 10,5 ; 11,2 ; 9,8 et 10,3.

Calculons la moyenne au contrôle pour l'ensemble des classes de première.

On utilise la formule précédente :

$$m = \frac{25 \times 10,5 + 26 \times 11,2 + 30 \times 9,8 + 29 \times 10,3}{25 + 26 + 30 + 29} = \frac{1146,4}{110} = 10,42.$$

La moyenne au contrôle commun est 10,42.

3. Variance et écart type

Introduction

Au sept contrôles de mathématiques du trimestre, un élève A a obtenu les notes: 10-15-12-12-15-14-15. Un élève B a obtenu les notes 5-20-8-16-15-10-19. Les deux élèves A et B ont la même moyenne 13,29. On observe cependant que les notes de A sont plus groupées autour de la moyenne que celle de B . Les élèves A et B n'ont pas le même profil. Il est donc nécessaire de pouvoir évaluer la dispersion autour de la moyenne. C'est le rôle de la variance et de l'écart type.

Variance et Ecart type

Considérons une série statistique (x_1, x_2, \dots, x_n) avec n_i les effectifs correspondants à chaque x_i et \bar{x} la moyenne de cette série.

La variance de la série statistique est le nombre $V = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} n_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$ avec $N = \sum_{i=1}^{i=n} n_i$

L'écart type de la série statistique est la racine carrée de la variance: $S = \sqrt{V}$
L'écart type mesure la dispersion des valeurs d'une série statistique autour de la moyenne. Plus l'écart type est élevé, plus la dispersion est grande.

Remarque

$$\begin{aligned} \text{La fonction } f(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i(x_i - x)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i^2 - 2x \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i + x^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i^2 - 2x \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i + x^2 \end{aligned}$$

représente la moyenne des carrés des écarts de chaque terme x_i au réel x . Il s'agit en fait d'un polynôme du second degré du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i = -2\bar{x}$, $c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} n_i x_i^2$ qui admet un minimum en $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2\bar{x}}{2} = \bar{x}$.
 $f(\bar{x})$ est la variance de la série statistique.

Influence sur l'écart type d'une transformation affine

Soient a et b deux réels et (x_1, x_2, \dots, x_n) une série statistique de taille n , de moyenne \bar{x} et d'écart type S . Alors la série statistique (y_1, y_2, \dots, y_n) , avec $y_i = ax_i + b$ pour chaque indice i , a pour écart type $|a|S$.

4. Quartile, décile

Définition

Soit une série statistique (x_1, x_2, \dots, x_n) de taille n .
Les quartiles partagent la série en quatre parties de même effectif.
Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des données soit inférieure ou égale à Q_1 .
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des données soit inférieure ou égale à Q_3 .
L'intervalle interquartile est l'intervalle $[Q_1; Q_3]$.
L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.
Les déciles partagent la série en 10 parties de même effectif.

Remarques

La médiane est le deuxième quartile.

L'écart interquartile mesure la dispersion des valeurs autour de la médiane, c'est à dire la dispersion des 50% des valeurs autour de la médiane.

Exemple

Dans une classe de 21 élèves, les notes obtenues rangées dans l'ordre croissant sont :

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
note	1	4	4	5	7	7	8	9	10	11	11	11	11	11	13	14	14	15	16	16	19

Pour obtenir le premier quartile il suffit de faire $21 \times 0,25 = 5,25$. Le premier quartile est la 6^{eme} valeur soit $Q_1 = 7$.

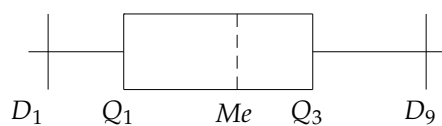
Pour obtenir le troisième quartile il suffit de faire $21 \times 0,75 = 15,75$. Le troisième quartile est la 16^{eme} valeur soit $Q_3 = 14$

5. Diagramme en boîte

Définition

Un diagramme en boîte permet de représenter une série statistique au moyen d'une boîte rectangulaire sur laquelle sont indiqués les informations suivantes:

- premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3
- premier décile D_1 , le neuvième décile D_9
- la médiane Me



Exemple

Dans deux classes de 30 élèves les notes obtenues à un devoir commun se répartissent de la manière suivante:

notes	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Classe 1	0	1	0	2	1	2	2	4	5	5	2	1	0	1	2	2
Classe 2	1	0	1	2	2	3	2	2	3	1	1	1	2	4	2	3

La médiane pour la classe 1 est 11 et pour la classe 2 est 11.

Calculons pour la classe 1 et la classe 2 D_1 , D_9 , Q_1 , Q_3

$$30 \times \frac{10}{100} = 3 \text{ ainsi } D_1 \text{ est la note obtenue par le } 3^{\text{eme}} \text{ élève.}$$

$$30 \times \frac{90}{100} = 27 \text{ ainsi } D_9 \text{ est la note obtenue par le } 27^{\text{eme}} \text{ élève.}$$

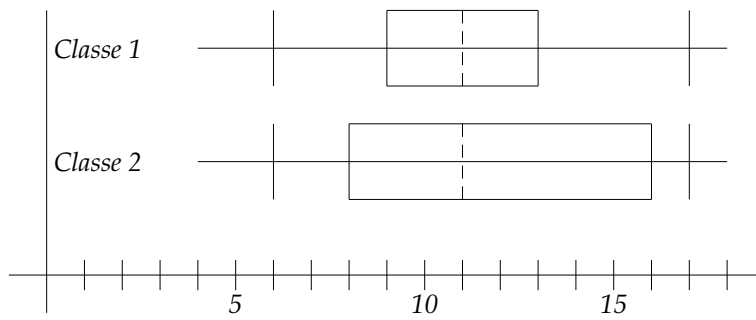
$$30 \times \frac{25}{100} = 7,5 \text{ ainsi } Q_1 \text{ est la note obtenue par le } 8^{\text{eme}} \text{ élève.}$$

$$30 \times \frac{75}{100} = 22,5 \text{ ainsi } Q_3 \text{ est la note obtenue par le } 23^{\text{eme}} \text{ élève.}$$

On obtient ainsi:

Classe	D_1	D_9	Q_1	Q_3
Classe 1	6	17	9	13
Classe 2	6	17	8	16

Le diagramme en boîte peut être construit de la façon suivante:



Ce diagramme montre que la classe 2 possède des notes beaucoup plus dispersées que le Classe 3.
25 % des notes de la classe 2 sont comprises entre 11 et 16
alors que 25% des notes de la classe 1 sont comprises entre 11 et 13

Chapitre 15

Probabilité

1. Vocabulaire

Vocabulaire

- **Expérience aléatoire, épreuve :** Une expérience aléatoire ou épreuve est une expérience dont le résultat est l'effet du hasard.
Exemple : Le jet d'un dé est une épreuve.
- **Univers :** L'univers Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire
Exemple : Pour le jet d'un dé $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- **Événement :** Un événement est une partie de Ω
Exemple : Pour le jet d'un dé, soit A l'événement " obtenir un chiffre divisible par 3 " alors $A = \{3; 6\}$
- **Événement élémentaire :** On appelle événement élémentaire tout singleton de Ω
Exemple : Pour le jet d'un dé, $\{3\}$ et $\{6\}$ sont des événements élémentaires.
- **Événement contraire :** On appelle événement contraire d'un événement A , la partie complémentaire de A dans Ω , noté \bar{A} .
Exemple : Pour le jet d'un dé, si $A = \{2;4;6\}$ alors $\bar{A} = \{1,3,5\}$
- **Événements incompatibles :** Deux événements A et B sont incompatibles, s'ils ne peuvent avoir lieu en même temps.
Exemple : Pour le jet d'un dé, $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{1,3,5\}$ sont incompatibles

2. Loi de probabilité

Loi de probabilité

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des événements élémentaires associés à une expérience aléatoire.

On appelle loi de probabilité sur Ω , toute application $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $x_i \mapsto p_i$
 vérifiant

- $p_i \geq 0$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

On peut traduire sous forme de tableau, cette loi de probabilité

x_1	x_2	x_n
p_1	p_2	p_n

Equiprobabilité

Si tous les réels p_i sont égaux alors on parle de situation d'**équiprobabilité** ou de **loi équirépartie**.

Exemple

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à jeter un dé. Si le dé n'est pas pipé, on conçoit aisément que les six chiffres ont autant de chances de sortir. Chacun a une chance sur 6. On peut alors considérer l'application de Ω dans \mathbb{R} qui à tout événement élémentaire associe sa chance d'apparaître.

On peut traduire cette situation dans le tableau suivant:

i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Nous faisons ainsi apparaître une loi de probabilité. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Cette situation peut être vérifiée expérimentalement. Notons par exemple f_n la fréquence de sortie du chiffre 6 en n lancers. Plus le nombre n de lancers est important et plus f_n s'approche de $p_6 = \frac{1}{6}$.

Cette propriété s'appelle **Loi des grands nombres**.

Espérance, Variance, écart type

Considérons la loi de probabilité suivante:

x_1	x_2	x_n
p_1	p_2	p_n

 avec $x_i \in \mathbb{R}$

• L'**espérance mathématique** de cette loi de probabilité est le nombre

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

La **variance** de cette loi de probabilité est le nombre

$$V = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

L'**écart type** de cette loi de probabilité est le nombre $\sigma = \sqrt{V}$

Exemple

En prenant l'exemple du paragraphe précédent (jet d'un dé) on obtient

$$\mu = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 5 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 6 \times \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

$$V = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6}$$

$$V \approx 2,92$$

$$\sigma \approx 1,71$$

3. Probabilité d'un événement

Probabilité d'un événement

Considérons Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Considérons sa loi de probabilité:

x_1	x_2	x_n
p_1	p_2	p_n

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A

Ainsi si $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, alors $P(A) = p_1 + p_2 + p_3$

Remarque

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité de A est $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Exemple

Considérons l'expérience qui consiste à jeter un dé pipé, de loi de probabilité

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est $p = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Propriété

Soit P une probabilité sur Ω alors

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si A et B sont deux événements quelconques $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. Variable aléatoire

Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle variable aléatoire réelle, toute fonction X de Ω dans \mathbb{R}

Si $\{x_1, \dots, x_k\}$ est l'ensemble des images par X alors on note $(X = x_i)$ l'événement de Ω formé des événements élémentaires qui ont pour image x_i par X .

On dit que la variable aléatoire X prend pour valeur x_1, x_2, \dots, x_n . La loi de probabilité est alors définie sur l'univers $\{x_1, \dots, x_k\}$. On représente la loi de probabilité dans le tableau suivant:

Valeur	x_1	x_2	x_n
Probabilité	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_n)$

Exemple

Considérons l'expérience qui consiste à lancer simultanément trois pièces de monnaie.

On note P ou F la face apparue pour chacune de ces pièces.

Imaginons le jeu qui consiste à gagner 1 euro, chaque fois que F apparaît et perdre 1 euro chaque fois que P apparaît.

L'application qui à chaque lancer associe le gain obtenue est une variable aléatoire que l'on peut traduire dans le tableau ci dessous.

	PPP	PPF	PFP	FPP	PFF	FFP	FPF	FFF
Gain	-3	-1	-1	-1	1	1	1	3

La variable aléatoire prend donc quatre valeurs: -3; -1; 1; et 3.

Déterminons maintenant sa loi de probabilité:

Gain	-3	-1	1	3
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On vérifie que $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$. On a donc bien défini une loi de probabilité.

L'espérance Mathématique est

$$\mu = -3 \times \left(\frac{1}{8}\right) - 1 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{8}\right) = 0$$